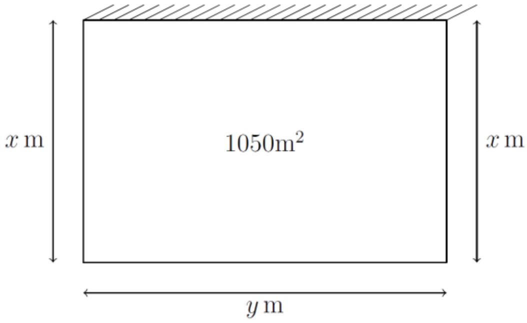
Δευτεροβάθμια Εξίσωση

Σε ένα τμήμα Α’ Λυκείου, οι μαθητές καλούνται να λύσουν το παρακάτω πρόβλημα:

«Ένας αγρότης επιθυμεί να περιφράξει ένα χωράφι σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου και εμβαδού 1050m^2 πλάτους x μέτρων. Στη μία πλευρά του χωραφιού, αντί της περίφραξης, θα χτίσει έναν τούβλινο τοίχο μήκους y μέτρων. Ο αγρότης θα χρησιμοποιήσει συνολικά 425 μέτρα περίφραξης. Κατασκευάστε μία εξίσωση και λύστε την για να βρείτε τις πιθανές τιμές των x και y.

Το διάγραμμα του προβλήματος δίνεται παρακάτω:»



Ο μαθητής Α και η μαθήτρια Β εργάζονται ατομικά στο πρόβλημα:

Μαθητής Α: Ωραία, το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι «Βάση επί Ύψος». Άρα πρέπει να έχω:

$$xy = 1050$$

Δεν είμαι σίγουρος για το πώς λύνω τέτοιες εξισώσεις. Βέβαια, δεν έχω χρησιμοποιήσει ακόμα όλα τα δεδομένα του προβλήματος...

Χμμ, το μοναδικό δεδομένο που μου έχει απομείνει είναι τα 425 μέτρα της περίφραξης, οπότε ίσως μπορώ να το χρησιμοποιήσω.

Το χρησιμοποιώ για να δημιουργήσω την παρακάτω εξίσωση:

$$2x + y = 425$$

Και έτσι:

$$y = 425 - 2x$$

Τώρα μπορώ να αντικαταστήσω το y της αρχικής μου εξίσωσης με το 425-2x, οπότε έχω:

$$x(425 - 2x) = 1050$$

Αυτή η αλγεβρική μορφή μου φαίνεται λίγο πιο γνώριμη. Μπορώ να απλοποιήσω τη συγκεκριμένη αλγεβρική παράσταση ως:

$$425x - 2x^2 = 1050$$

$$2x^2 - 425x + 1050 = 0$$

Αυτή είναι μια δευτεροβάθμια εξίσωση! Μπορώ να τη λύσω!

Φαίνεται δύσκολη παρόλα αυτά - θυμάμαι ότι μπορώ να τη λύσω με παραγοντοποίηση αλλά εγώ θα χρησιμοποιήσω τον τύπο:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Αντικαθιστώντας τα a, b, c με τα αντίστοιχα δεδομένα της δευτεροβάθμιας εξίσωσής μου, έχω:

$$x = \frac{-(-425) \pm \sqrt{(-425)^2 - 4 \times 2 \times 1050}}{2 \times 2}$$

$$= \frac{425 \pm \sqrt{172225}}{4}$$

$$x = \frac{425 \pm 415}{4}$$

Χρησιμοποιώντας το κομπιουτεράκι, βρίσκω $x = 2{,}5$ και $x = 210$. Επομένως, τα πιθανά μήκη που μου ζητούνται στο συγκεκριμένο πρόβλημα είναι 2,5 και 210.

Μαθήτρια Β: Ωραία, θυμάμαι ότι έχουμε κάνει παρόμοια προβλήματα στο Γυμνάσιο, τα οποία σχετίζονταν κάπως με την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Αν το εμβαδόν είναι 1050, τότε:

$$xy = 1050$$

Ακόμα, πρέπει να έχω $2x + y = 425$. Επομένως, $x(425 - 2x) = 1050$.

Πράγματι, αυτή η εξίσωση θα είναι δευτεροβάθμια! Τέλεια, ας την κάνω λοιπόν να μοιάζει με δευτεροβάθμια:

$$425x - 2x^2 = 1050$$

$$2x^2 - 425x + 1050 = 0$$

Πώς τις λύνω αυτές τις εξισώσεις; Θα μπορούσα να χρησιμοποιήσω τον τύπο αλλά ξέρω επίσης ότι μπορώ να παραγοντοποιήσω πρώτα. Υπάρχει ένα 2 μπροστά από το x^2, οπότε η παραγοντοποίηση θα πρέπει να πάρει την παρακάτω μορφή:

$$(2x + \ldots)(x + \ldots)$$

Οι δύο αριθμοί πρέπει να έχουν γινόμενο 1050, και 2 φορές ο ένας συν τον άλλον πρέπει να μου κάνει -425 … Χμμ, ας δοκιμάσω μερικά ζεύγη παραγόντων του 1050:

$$1050 \times 1,\ 525 \times 2,\ 350 \times 3,\ 210 \times 5$$

Ωραία, φτάνουν αυτά τα ζεύγη. Πρέπει να έχω από ένα πλην μέσα στην κάθε παρένθεση, λόγω του -425. Επίσης, μπορώ να αποκλείσω το πρώτο και τρίτο ζευγάρι της παραπάνω λίστας παραγόντων επειδή δε μου ταιριάζουν και πολύ. Θα δοκιμάσω το δεύτερο ζευγάρι, που φαίνεται να είναι ιδανικό:

$$(2x - 2)(x - 525) = 0$$

Μπα! Δε φαίνεται να δουλεύει αλλά είμαι πολύ κοντά στη λύση. Άμα αντέστρεφα τους δύο παράγοντες, τοποθετώντας τον έναν στη θέση του άλλου;

$$(2x - 525)(x - 2) = 0$$

Ακόμα δε δουλεύει. Ίσως το τελευταίο ζευγάρι; Ας το δοκιμάσω:

$$(2x - 210)(x - 5) = 0$$

Ούτε αυτό δουλεύει έτσι... Ανάποδα ίσως:

$$(2x - 5)(x - 210) = 0$$

Ναι! Αυτό είναι! Επομένως, οι λύσεις είναι:

$x = 2{,}5$ και $x = 210$ ... Τέλος!

Ερωτήσεις:

α. Πώς μπορείτε να περιγράψετε τη διαφορά μεθόδου στις απαντήσεις των δύο μαθητών;

β. Ποια είναι τα πιθανά πλεονεκτήματα και ποια τα μειονεκτήματα της κάθε μεθόδου;

γ. Ποιες άλλες μέθοδοι υπάρχουν για την επίλυση αυτού του προβλήματος;

δ. Τι θα λέγατε σε αυτούς τους μαθητές και γενικά σε όλη την τάξη;

Αυτή η Δραστηριότητα σχεδιάστηκε από την ομάδα του MathTASK 2016-17. Πείτε μας εάν σας φάνηκε χρήσιμη και εάν έχετε προτάσεις για τη βελτίωσή της στο @mathtask ή επικοινωνήστε με την Ειρήνη Μπιζά στο i.biza@uea.ac.uk.
Για περισσότερες δραστηριότητες, επισκεφτείτε τη σελίδα του MathTASK.