

# Μετασχηματίζοντας τις προσδοκίες καθηγητών των μαθηματικών σε στρατηγικές εμπειρωμένες στην πραγματικότητα της τάξης

## Εισαγωγή

Το [MathTASK](#) είναι ένα συλλογικό ερευνητικό πρόγραμμα που ασχολείται με το μαθηματικό και παιδαγωγικό λόγο των εκπαιδευτικών και το μετασχηματισμό των προσδοκιών τους σε παιδαγωγικές πρακτικές. Όπως παρατηρείται στη βιβλιογραφία, υπάρχει φανερή απόκλιση ανάμεσα στις θεωρητικές και εκτός πλαισίου απόψεις των εκπαιδευτικών για τα μαθηματικά και τη διδασκαλία τους και της προσέγγισης που αυτοί οι εκπαιδευτικοί ακολουθούν στη τάξη (για παράδειγμα, Speer, 2005). Για αυτό το λόγο, συχνά προγράμματα εκπαίδευσης εκπαιδευτικών χρησιμοποιούν συγκεκριμένα παραδείγματα από τη τάξη στην προετοιμασία των εκπαιδευτικών (e.g. Kersting, 2008; Markovits and Smith, 2008). Η δική μας έρευνα συνάδει με αυτές τις απόψεις και συμφωνεί ότι η γνώση των εκπαιδευτικών διερευνάται και αναπτύσσεται καλύτερα σε συγκεκριμένο διδακτικό πλαίσιο. Για το σκοπό αυτό σχεδιάζουμε δραστηριότητες βασισμένες σε συγκεκριμένες διδακτικές καταστάσεις από τη διδασκαλία των μαθηματικών (από εδώ και στο εξής *Δραστηριότητες*) τις οποίες μετά χρησιμοποιούμε ως κίνητρο για συζήτηση για ερευνητικούς ή εκπαιδευτικούς σκοπούς. Αυτές οι διδακτικές καταστάσεις είναι μεν υποθετικές, αλλά βασίζονται σε θέματα μάθησης και διδασκαλίας που η βιβλιογραφία αλλά και η εμπειρία έχουν επισημάνει ως σημαντικά. Τόσο στην έρευνα όσο και στην εκπαίδευση των εκπαιδευτικών (μελλοντικών και εν-υπηρεσία), οι *Δραστηριότητες* αυτές έχουν φανεί πολύ χρήσιμες στη διευκόλυνση των εκπαιδευτικών να διατυπώσουν τόσο τις απόψεις τους όσο και τις προτιθέμενες διδακτικές τους πρακτικές.

Μέχρι τώρα, ερευνητές της διδακτικής μαθηματικών και εκπαιδευτές εκπαιδευτικών από το Ηνωμένο Βασίλειο, την Ελλάδα και τη Βραζιλία έχουν συμμετάσχει στο [MathTASK](#). Η έρευνα που έχει διεξαχθεί και αναμένουμε να συνεχισθεί στα επόμενα χρόνια, κατηγοριοποιείται σε τέσσερα πεδία με παλαιότερο το πρώτο που ξεκίνησε το 2005: (1) **μαθηματική σκέψη**, το πεδίο αυτό εστιάζει σε παιδαγωγικές και διδακτικές πρακτικές σε σχέση με τη διδασκαλία συγκεκριμένων μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών· (2) **διαχείριση της τάξης και διδασκαλία των μαθηματικών**, το πεδίο αυτό αφορά καταστάσεις όπου η δυσκολίες στη διαχείριση της τάξης παρεμβαίνουν στην εκμάθηση των μαθηματικών· (3) [CAPTeaM](#), αυτό το πεδίο είναι χρηματοδοτούμενο από τη Βρετανική Ακαδημία και εστιάζει στην συμπερίληψη στη τάξη των μαθηματικών στοχεύοντας στον κλονισμό των «ικανοτιστικών» (ableist) απόψεων στη μαθηματική παιδεία (CAPTeaM: Challenging Ableist Perspectives on the Teaching of Mathematics), ειδικά σε άτομα με αναπηρία· και (4) **ο ρόλος της ψηφιακής τεχνολογίας και άλλων πηγών** στη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών.

Επιπλέον, και καθώς το πρόγραμμα προχωρά, νέες κατευθύνσεις αναπτύσσονται εμπνευσμένες από τις διδακτικές εμπειρίες των εκπαιδευτικών που συμμετέχουν.

Η μορφή των *Δραστηριοτήτων* ποικίλλει προκειμένου να καλύψει το εύρος των θεμάτων που λαμβάνουν χώρα στην τάξη των μαθηματικών. Για παράδειγμα, μπορεί να είναι μονόλογος ή διάλογος, να είναι σε μορφή γραπτού σεναρίου ή βίντεο, να περιλαμβάνει έναν ή περισσότερους μαθητές, να περιλαμβάνει ή όχι παρέμβαση εκπαιδευτικού, κ.ά.. Στις ενότητες που ακολουθούν περιγράφουμε εν συντομία κάθε ένα από τα πεδία που προαναφέραμε.

## Μαθηματική σκέψη

Στις *Δραστηριότητες* αυτού του πεδίου (Biza, Nardi & Zachariades, 2007, 2009, 2014, 2018· Nardi, Biza & Zachariades, 2012· Zachariades, Nardi & Biza, 2013· Ζαχαριάδης, Μπιζιά, & Ναρδή, 2007) καλούμε τους εκπαιδευτικούς:

- να λύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα,
- να εξετάσουν τη λύση (υποθετική μεν, αλλά εμπνευσμένη από τη πράξη και την ερευνητική βιβλιογραφία) που προτείνει ένας (ή περισσότεροι) μαθητής και σε μερικές περιπτώσεις να εξετάσουν την αντίδραση του εκπαιδευτικού (υποθετική αλλά επίσης ενημερωμένη από την πράξη και την ερευνητική βιβλιογραφία), και
- να περιγράψουν την προσέγγιση που θα υιοθετούσαν οι ίδιοι σε αυτήν την περίπτωση.

Μέσα από τις απαντήσεις των εκπαιδευτικών σε αυτές τις *Δραστηριότητες*, είχαμε αρχικά στόχο να διερευνήσουμε τη μαθηματική τους γνώση και τη βαρύτητα που δίνουν σε ορισμένες παιδαγωγικές και διδακτικές πρακτικής (Biza κ.ά., 2007).

Μέχρι στιγμής, οι απαντήσεις των εκπαιδευτικών σε αυτές τις *Δραστηριότητες*, καθώς και σε ημι-δομημένες συνεντεύξεις μετά τις γραπτές απαντήσεις, μας επέτρεψαν να έχουμε πρόσβαση σε μια σειρά από γνώσεις και πεποιθήσεις (επιστημολογικές και παιδαγωγικές) των εκπαιδευτικών. Για παράδειγμα, στο άρθρο (Biza κ.ά., 2009) συζητάμε για τα πολλαπλά διδακτικά συμβόλαια σχετικά με τη χρήση και το ρόλο της οπτικοποίησης στα μαθηματικά και στη μαθηματική εκπαίδευση που οι εκπαιδευτικοί θα ήθελαν να εγκαθιδρύσουν στη τάξη τους. Επίσης, εξετάζουμε τις απόψεις των εκπαιδευτικών σχετικά με το αν ένα επιχείρημα βασισμένο μόνο στη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης είναι αποδεκτό.

Οι απαντήσεις των εκπαιδευτικών σε αυτές τις *Δραστηριότητες* και τις συνεντεύξεις αποκάλυψαν ένα πολύπλοκο σύνολο παραγόντων που επηρεάζουν τους εκπαιδευτικούς, όταν καθορίζουν τις ενέργειές τους (Nardi κ.ά., 2012 ) - αυτό που ο Herbst και οι συνεργάτες του (για παράδειγμα, Herbst και Chazan, 2003) περιγράφουν ως την *πρακτική ορθολογικότητα της διδασκαλίας (practical rationality of teaching)*. Στο άρθρο Nardi *et al.* (2012), δείχνουμε ότι τα επιχειρήματα των εκπαιδευτικών δεν πρέπει να αναλύονται μόνο για τη μαθηματική τους ακρίβεια, πρέπει να εξετάζονται υπό το πρίσμα άλλων παραγόντων και προτεραιοτήτων: *παιδαγωγικών, επαγγελματικών,*

προσωπικών και ανάλογα με το αναλυτικό πρόγραμμα. Ο συνυπολογισμός αυτών των παραγόντων μπορεί να μας δώσουν ακριβέστερη εικόνα για το τι επηρεάζει τις ενέργειες των εκπαιδευτικών στην τάξη.

Πρόσφατα, προτείναμε μια νέα μορφή *Δραστηριότητας* στην οποία εκτός από τις εσφαλμένες (υποθετικές) απαντήσεις από μαθητές, προσθέσαμε και μια υποθετική απάντηση από τον δάσκαλο (Biza κ.ά., 2018; Zachariades κ.ά., 2013). Με αυτή τη νέα μορφή διερευνούμε, όχι μόνο αν ο εκπαιδευτικός μπορεί να εντοπίσει τα μαθηματικά λάθη του μαθητή και να απαντήσει κατάλληλα, αλλά ακόμα περισσότερο, το πώς αξιολογεί την παιδαγωγική προσέγγιση που ακολουθεί ένας άλλος (υποθετικός) εκπαιδευτικός. Η ανάλυση απαντήσεων εκπαιδευτικών σε αυτή τη *Δραστηριότητα* έδειξε διακύμανση στην ικανότητα των εκπαιδευτικών να διαγνώσουν και να αντιμετωπίσουν διδακτικές καταστάσεις, σε αυτή την περίπτωση, η διδακτική κατάσταση αναφερόταν στο ρόλο της οπτικοποίησης στο μαθηματικό συλλογισμό. Περιγράφουμε αυτήν τη διακύμανση με μια τυπολογία με τέσσερα αλληλένδετα χαρακτηριστικά: α) *συμφωνία μεταξύ δηλωμένων πεποιθήσεων και προτιθέμενης πρακτικής*, β) *την πλασιοποίηση της απάντησης στη συγκεκριμένη κατάσταση*, γ) *υποστασιοποίηση του παιδαγωγικού λόγου*, και δ) *υποστασιοποίηση του μαθηματικού λόγου* (Biza, et al. 2018).

## Διαχείριση τάξης

Το κίνητρο για αυτό το πεδίο του MathTASK προήλθε κατευθείαν από εκπαιδευτικούς και εκπαιδευτές εκπαιδευτικών που συμμετείχαν σε *Δραστηριότητες Μαθηματικής Σκέψης* οι οποίοι ότι η διαχείριση της τάξης επηρεάζει συχνά τους εκπαιδευτικούς στην υλοποίηση των διδακτικών τους στόχων (για παράδειγμα, Biza, Joel & Nardi, 2015· Biza, Nardi & Joel, 2015).

Οι *Δραστηριότητες* που σχεδιάζουμε σε αυτό το πεδίο βασίζονται σε ρεαλιστικές καταστάσεις τάξεων που συνδυάζουν τη μαθηματική μάθηση και τη δύσκολες συμπεριφορές στην τάξη, όπως συγκρούσεις και διαφωνίες μεταξύ των μαθητών ή μεταξύ μαθητών και εκπαιδευτικών. Για παράδειγμα, σε μια από αυτές τις *Δραστηριότητες* δίνεται στους μαθητές μιας τάξης το πρόβλημα: «Όταν  $p=2,8$  και  $c=1,2$ , να υπολογίσετε την παρακάτω παράσταση:  $3c^2+5p-3c(c-2)-4p$ ». Δύο μαθητές βρίσκουν τη σωστή απάντηση (10) με διαφορετικούς τρόπους. Ο μαθητής Α αντικαθιστά τις τιμές των  $p$  και  $c$  και υπολογίζει την παράσταση. Ο μαθητής Β απλοποιεί πρώτα την παράσταση και στη συνέχεια αντικαθιστά τις τιμές των  $p$  και  $c$ . Όταν ο μαθητής Α παραδέχεται τη δυσκολία του με την απλοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων, ο μαθητής Β απαντά επιθετικά («είσαι χαζός») και υποτιμητικά («αλλά τι να περιμένω άλλωστε από εσένα»). Και οι δύο λύσεις είναι σωστές, η προσέγγιση, όμως, του μαθητή Β δείχνει ευχέρεια σε αλγεβρικές δεξιότητες ενώ ταυτόχρονα η συμπεριφορά του είναι προβληματική. Δώσαμε τη *Δραστηριότητα* αυτή σε 21 εκπαιδευόμενους καθηγητές μαθηματικών στη Βρετανία και τους ζητήσαμε να

απαντήσουν γραπτά και στη συνέχεια να συζητήσουν πώς θα χειρίζονταν οι ίδιοι αυτή την κατάσταση (Biza, Nardi & Joel, 2015).

Τα αποτελέσματα από τις απαντήσεις των εκπαιδευτικών δείχνουν τις κοινωνικές και μαθηματοκοινωνικές νόρμες (Cobb & Yackel, 1996), που θα ήθελαν να εγκαθιδρύσουν στην τάξη τους. Αυτές οι νόρμες περιλαμβάνουν σεβασμό στους συμμαθητές, σημασία στην αξία του διαλόγου και της διερεύνησης στα μαθηματικά. Ωστόσο, συχνά οι εκπαιδευτικοί χάνουν την ευκαιρία να εμπλέξουν τους μαθητές σε μαθηματικές προκλήσεις ή σε συζητήσεις για τα μαθηματικά και τις πρακτικές τους και επιλέγουν να εστιάσουν σε θέματα συμπεριφοράς ή υιοθετούν διχοτομικές και απλουστευτικές απόψεις για τη μάθηση των μαθηματικών, όπως, για παράδειγμα, εργαλειακή/instrumental και σχεσιακή/relational κατανόηση (Skemp, 1976).

## Συμπερίληψη

Από το 2014, ένα νέο πεδίο του MathTASK αναπτύχθηκε με στόχο τη μαθηματική εκπαίδευση χωρίς αποκλεισμούς και τις απόψεις των εκπαιδευτικών σχετικά με το πώς μαθητές με αναπηρία και ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες μαθαίνουν μαθηματικά. Αυτό το πεδίο ονομάζεται [CAPTeaM](#) (Challenging Ableist Perspectives on the Teaching of Mathematics – Αλλάζοντας τις «ικανοτιστικές» (ableist) απόψεις για την παιδεία των μαθηματικών) και χρηματοδοτείται από τη Βρετανική Ακαδημία (British Academy).

Σύμφωνα με την θεώρηση του «ικανοτισμού» (ableism), οι αρτιμελείς άνθρωποι είναι ο κανόνας στην κοινωνία και η αναπηρία είναι μια ατυχία, ένα μειονέκτημα που πρέπει να ξεπεραστεί. Στο πλαίσιο της εκπαίδευσης, αυτή η θεώρηση οδηγεί σε θεσμικές και προσωπικές προκαταλήψεις εναντίον των ατόμων με αναπηρία και ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες, και επιδρά δραστικά στις διδακτικές προσεγγίσεις (Nardi, Healy & Biza, 2015· Healy, Nardi & Fernandes, 2015· Nardi, Healy, Biza & Fernandes, 2016, 2018). Στο CAPTeaM ερευνούμε πώς οι “ικανοτιστικές” απόψεις επηρεάζουν τη διδασκαλία των μαθηματικών, ένας κλάδος όπου οι αντιλήψεις του κοινού για την έμφυτη ικανότητα συχνά διαμορφώνουν τις παιδαγωγικές προοπτικές και πρακτικές.

Σε αυτό το πεδίο, συνδυάζουμε την εμπειρία της ερευνητικής ομάδας μας στο σχεδιασμό *Δραστηριοτήτων* με αυτή ερευνητών από τη Βραζιλία ([Rumo à Educação Matemática Inclusiva](#), REMI) που εργάζονται πάνω στην συμπερίληψη και τη μαθηματική εκπαίδευση. Μαζί αναπτύσσουμε και δοκιμάζουμε *Δραστηριότητες* που καλούν τους εκπαιδευτικούς να αναλογιστούν τις προκλήσεις της διδασκαλίας των μαθηματικών σε μία τάξη όπου όλοι είναι αποδεκτοί. Οι *Δραστηριότητες* σε αυτό το πεδίο είναι δύο τύπων, *Τύπου 1* και *Τύπου 2*.

Στις *Δραστηριότητες* του *Τύπου 1*, χρησιμοποιούμε την προσέγγιση που περιγράψαμε νωρίτερα (Biza κ.ά., 2007) όπου η διδακτική κατάσταση είναι ένα επεισόδιο σε μια υποθετική τάξη μαθηματικών που παρουσιάζεται με ένα απόσπασμα βίντεο συνοδευόμενο από μια σύντομη αφήγηση. Στη συνέχεια, καλούμε τους συμμετέχοντες εκπαιδευτικούς να αναλάβουν το ρόλο του καθηγητή της τάξης αυτής και να

αξιολογήσουν τις ενέργειες των μαθητών με αναπηρία και ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες που είδαν στο απόσπασμα βίντεο, αρχικά, σε ατομικές γραπτές απαντήσεις σε μια σειρά ερωτημάτων, και στη συνέχεια, σε ομαδική συζήτηση η οποία συνήθως βιντεοσκοπείται.

Οι *Δραστηριότητες Τύπου 2* αποσκοπούν να προβληματίσουν σχετικά με το πώς η πρόσβαση ή ο περιορισμός κάποιων επικοινωνιακών δυνατοτήτων επηρεάζει τη μαθηματική δραστηριότητα. Σε αυτές τις *Δραστηριότητες* οι συμμετέχοντες εκπαιδευτικοί εργάζονται σε ομάδες των τριών μελών. Τα δύο μέλη της ομάδας καλούνται να λύσουν μια μαθηματική άσκηση, ενώ, προσωρινά και τεχνητά, στερούνται μια από τις αισθήσεις τους (π.χ. ακοή ή όραση). Το τρίτο μέλος απλά παρατηρεί και καταγράφει τις ενέργειες των άλλων δύο μελών. Ακολουθεί ομαδική συζήτηση των εμπειριών της κάθε ομάδας (Nardi κ.ά., 2016; 2018).

Για παράδειγμα, μια από τις *Δραστηριότητες* του Τύπου 1 (Nardi κ.ά., 2016) αφορά μία διδακτική κατάσταση στην οποία ζητείται από τους μαθητές να περιγράψουν την τετραγωνική πυραμίδα σε κάποιον που δε γνωρίζει το γεωμετρικό στερεό. Ο André, που είναι τυφλός δουλεύει με τρισδιάστατα στερεά και δίνει μια περιγραφή, την οποία βλέπουν οι συμμετέχοντες σε ένα απόσπασμα βίντεο, βασισμένη στην ιδέα ότι η πυραμίδα αποτελείται από τετράγωνα που σταδιακά μικραίνουν μέχρι που γίνονται ένα σημείο στη κορυφή. Η ανάλυση των απαντήσεων 81 εκπαιδευτικών από το Ηνωμένο Βασίλειο και τη Βραζιλία δείχνει ότι παρόλο που καταρχήν εκτιμούν την απάντηση του André από μαθηματικής πλευράς, έχουν την τάση να μετατρέψουν τον ορισμό του για την τετραγωνική πυραμίδα στον ορισμό του βιβλίου (έδρες, ακμές και κορυφές) και στην περιγραφή της τετραγωνικής πυραμίδας ως σύνθεση από σχήματα (π.χ. τέσσερα τρίγωνα και ένα τετράγωνο). Ως αποτέλεσμα χάνουν την ευκαιρία να συζητήσουν την απάντησή του και να την αξιοποιήσουν διδακτικά με την υπόλοιπη τάξη.

Σε μία από τις *Δραστηριότητες* του Τύπου 2, οι συμμετέχοντες χωρίστηκαν σε ομάδες των τριών, ένας από την ομάδα είχε το ρόλο του *καθηγητή* ο οποίος δε μπορούσε να μιλήσει και ο άλλος το ρόλο του *μαθητή* ο οποίος δε μπορούσε να δει. Ο τρίτος ήταν ο παρατηρητής. Ο καθηγητής έπρεπε να δώσει ένα μαθηματικό πρόβλημα στο μαθητή και εκείνος με τη σειρά του έπρεπε να το λύσει και να επικοινωνήσει τη λύση με το καθηγητή. Η ανάλυση των στρατηγικών που ανέπτυξαν συμμετέχοντες εκπαιδευτικοί δυο Ηνωμένο Βασίλειο και στην Βραζιλία (Nardi κ.ά., 2018) έδειξε να συμβαίνουν τουλάχιστον δύο αλλαγές λόγου (*discursive shifts*) κατά τη διάρκεια της εμπλοκής με τη *Δραστηριότητα*: *συντονισμός (attunement)* και *επανανοηματοδότηση (resignification)*. Αρχικά αισθήματα αδυναμίας να λυθεί το πρόβλημα και ενόχλησης εξελίχθηκαν σε ενθουσιασμό, ευχαρίστηση και έκπληξη κατά τη λύση του προβλήματος και αυτή η αλλαγή είναι πολύ σημαντική σε αυτή τη *Δραστηριότητα*. Επίσης, η προσπάθεια των συμμετεχόντων να επικοινωνήσουν μαθηματικά ενώ κάποιες από τις αισθήσεις τους ήταν περιορισμένες (ακοή ή όραση) επαναπροσδιόρισε παραδοσιακούς ρόλους, όπως αυτούς του μαθητή και του καθηγητή, και δημιούργησε νέες ισοροπίες όπου όλοι είναι εξίσου σημαντικοί.



## Ψηφιακής τεχνολογίας και άλλες πηγές

Σε αυτό το πεδίο εστιάζουμε στο ρόλο της ψηφιακής τεχνολογίας και άλλων πηγών στη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών. Πιο συγκεκριμένα, σχεδιάζουμε *Δραστηριότητες* που καλούν τους εκπαιδευτικούς να αναστοχαστούν και να συζητήσουν διδακτικές καταστάσεις στις οποίες ο εκπαιδευτικός και οι μαθητές χρησιμοποιούν εκπαιδευτικό λογισμικό (π.χ. περιβάλλοντα Δυναμικής Γεωμετρίας ή Αλγεβρικής και Γραφικής Διαχείρισης, κ.ά.) και διαδικτυακές ή άλλες πηγές (π.χ. μηχανές αναζήτησης, ηλεκτρονικά βιβλία, εγχειρίδια, χαρτί και μολύβι, κ.ά.) για να εισάγουν μαθηματικές έννοιες ή να λύσουν προβλήματα. Οι *Δραστηριότητες* αυτές συζητούν διαφορετικές μαθηματικές προσεγγίσεις – οπτικές, συμβολικές και λεκτικές – και πιθανές συνδέσεις μεταξύ αυτών των προσεγγίσεων. Επίσης, συζητούν θέματα σχετικά με τις δυνατότητες αλλά και τους περιορισμούς της ψηφιακής τεχνολογίας καθώς και των πιθανών αντιφάσεων μεταξύ διαφορετικών μορφών της μαθηματικής επικοινωνίας. Ο σχεδιασμός αυτών των *Δραστηριότητες* βασίζεται στην ερευνητική βιβλιογραφία και στη διδακτική εμπειρία (π.χ. Giraldo, Gaetano & Mattos, 2013). Πρόσφατα, κάποιες *Δραστηριότητες*, εμπνέονται από ερευνητικές παρατηρήσεις που έγιναν στο πλαίσιο της διδακτορικής διατριβής του μέλους την ομάδας μας Lina Kayali (Kayali & Biza, 2017, 2018).

## Νέες κατευθύνσεις

Μια άλλη κατεύθυνση της δουλειάς μας στο MathTASK είναι η εμπλοκή των εκπαιδευτικών στη συγγραφή δικών τους επεισοδίων από τη τάξη. Η ιδέα συνάδει με αυτή ερευνητών όπως οι Zazkis, Sinclair και Liljedahl (2013) που προσκαλούν τους εκπαιδευτικούς να δημιουργήσουν δικά τους σενάρια διδασκαλίας. Αρχίσαμε να εργαζόμαστε προς αυτήν την κατεύθυνση το 2014, όταν καλέσαμε εκπαιδευόμενους εκπαιδευτικούς στο Ηνωμένο Βασίλειο να φτιάξουν διδακτικές καταστάσεις, σαν αυτές που χρησιμοποιούμε στις *Δραστηριότητες* του MathTASK, εμπνευσμένες από τη πρακτική τους άσκηση στα σχολεία. Συγκεντρώσαμε 12 διδακτικές καταστάσεις, τις ταξινομήσαμε θεματικά και καλέσαμε τους μελλοντικούς εκπαιδευτικούς να τις συζητήσουν σε ομάδες, να καταγράψουν τα κύρια σημεία της συζήτησης και, στη συνέχεια, να τα μοιραστούν αυτά τα σημεία με τις υπόλοιπες ομάδες. Τα θέματα που εντοπίσαμε αφορούσαν τη μάθηση των μαθηματικών, όπως παρανοήσεις, εργαλειακή (instrumental) και σχεσιακή (relational) κατανόηση, καθώς και γενικότερα παιδαγωγικά θέματα, όπως διαχείριση της τάξης, συμμετοχή των μαθητών και σχέσεις μελλοντικών και εν ενεργεία εκπαιδευτικών. Οι συζητήσεις της κάθε ομάδας και της τάξης ηχογραφήθηκαν και απομαγνητοφωνήθηκαν. Αργότερα συζητήσαμε αυτές τις διδακτικές καταστάσεις και με εν ενεργεία εκπαιδευτικούς. Θεωρούμε ότι ο εντοπισμός και η συγγραφή αυτών των διδακτικών καταστάσεων δίνουν τη δυνατότητα για προβληματισμό και αναστοχασμό των εκπαιδευτικών πάνω στη διδακτική τους πράξη. Επιπλέον, θεωρούμε ότι η συνεργασία ερευνητών και εκπαιδευτικών στην ανάλυση

αυτών των διδακτικών καταστάσεων μπορεί να συνεισφέρει τόσο την έρευνα όσο και στην επαγγελματική κατάρτιση και επιμόρφωση των εκπαιδευτικών.

Σε ένα άλλο έργο, ύστερα από τη παρατήρηση ότι οι εκπαιδευόμενοι εκπαιδευτικοί συχνά και επιτακτικά θέτουν το θέμα της διαχείρισης της τάξης, και με τη βοήθεια της χρηματοδότησης από το 2015-16 *Ian Hunter Prize* στο πανεπιστήμιο του East Anglia, συγκροτήσαμε μια ομάδα από καθηγητές μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (με λιγότερη ή περισσότερη εμπειρία), ερευνητές της διδακτικής των μαθηματικών (καθηγητές και διδακτορικούς φοιτητές) και εκπαιδευτές των καθηγητών των μαθηματικών με στόχο να διερευνήσουμε πώς μπορεί να επιτευχθεί ισορροπία μεταξύ της δημιουργίας ευκαιριών ποιοτικής μαθηματικής σκέψης και της μέριμνας για τη διαχείριση της τάξης και των ζητημάτων συμπεριφοράς. Η ομάδα σχεδίασε και χρησιμοποίησε *Δραστηριότητες* με στόχο τη συζήτηση θεμάτων που στηρίζουν ή εμποδίζουν αυτή την ισορροπία. Ένα χρήσιμο εργαλείο σε αυτή τη συζήτηση είναι η 10-βαθμη κλίμακα του Terry Haydn (2012) για την ατμόσφαιρα εργασίας στην τάξη η οποία δεν επινοήθηκε συγκεκριμένα για την τάξη των μαθηματικών και έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως σε προγράμματα επιμόρφωσης εκπαιδευτικών. Τα αποτελέσματα αυτής της συνεργασίας (Biza κ.ά., 2016) περιλαμβάνουν εργαστήρια επιμόρφωσης εκπαιδευτικών στη διδασκαλία των μαθηματικών στα οποία οι εκπαιδευτικοί καλούνται να προβληματιστούν σχετικά με την εμπειρία της τάξης και να δώσουν παραδείγματα διδακτικών καταστάσεων χρησιμοποιώντας την κλίμακα Haydn.

## Λίστα Δημοσιεύσεων

- Biza, I., Nardi, E., & Joel, G. (2015). Balancing classroom management with mathematical learning: Using practice-based task design in mathematics teacher education. *Mathematics Teacher Education and Development*, 17(2), 182-198.
- Biza, I., Joel, G., & Nardi, E. (2015). Transforming trainees' aspirational thinking into solid practice. *Mathematics Teaching*, 246, 36-40.
- Biza, I., Nardi, E., Thoma, A., Kayali, L., Cook, T., Hughes, E., Wolsey, R., Joel, G., & Jagdev, M. (2016). Working atmosphere in the secondary mathematics classroom: When things do not work according to the lesson plan. In G. Adams (Ed.). *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics* 36(2), 7-12.
- Biza, I., Nardi, E., & Zachariades, T. (2007). Using tasks to explore teacher knowledge in situation-specific contexts. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10, 301-309
- Biza, I., Nardi, E., & Zachariades, T. (2009). Teacher beliefs and the didactic contract on visualization. *For the Learning of Mathematics*, 29(3), 31-36.
- Biza, I., Nardi, E., & Zachariades, T. (2014). Utilizando tarefas de situação específica para explorar o conhecimento matemático e as crenças pedagógicas: Exemplos de Álgebra e Análise [Using situation-specific tasks to explore teacher mathematical knowledge and pedagogical beliefs: Examples from Algebra and Analysis]. In T. Rogue & V. Giraldo (Eds.), *O saber do professor de matemática: ultrapassando a dicotomia entre didática e conteúdo [Mathematics teachers' knowledge: beyond the dichotomy between pedagogy and content]* (pp. 329-378). Rio de Janeiro, Brazil: Editora Ciência Moderna Ltda.
- Biza, I., Nardi, E., & Zachariades, T. (2018). Competences of mathematics teachers in diagnosing teaching situations and offering feedback to students: Specificity, consistency and reification of pedagogical and mathematical discourses. In T. Leuders, J. Leuders, &

- K. Philipp (Eds.), *Diagnostic Competence of Mathematics Teachers. Unpacking a complex construct in teacher education and teacher practice*, (pp. 55-78). New York: Springer.
- Cobb, P., & Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational Psychologist*, 31(3/4), 175-190.
- Giraldo, V., Caetano, P., & Mattos, F. (2013). *Recursos Computacionais no Ensino de Matemática [Computational Resources in the Teaching of Mathematics]*. Rio de Janeiro, Brazil: SBM.
- Haydn, T. (2012). *Managing pupil behaviour: working to improve classroom climate*. London: Routledge.
- Herbst, P., & Chazan, D. (2003). Exploring the practical rationality of mathematics teaching through conversations about videotaped episodes: The case of engaging students in proving. *For the Learning of Mathematics*, 23(1), 2–14.
- Kayali, L., & Biza, I. (2017). “One of the beauties of Autograph is ... that you don’t really have to think”: Integration of resources in mathematics teaching. In T. Dooley & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the 10th Conference of European Research in Mathematics Education (CERME)* (pp. 2405-2413). Dublin, Ireland.
- Kayali, L., & Biza, I. (2018). Micro-evolution of documentational work in the teaching of the volume of revolution. In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg & L. Sumpter (Eds.), *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)* (Vol. 3, pp. 195-202). Umeå, Sweden: PME.
- Kersting, N. (2008). Using video clips of mathematics classroom instruction as item prompts to measure teachers’ knowledge of teaching mathematics. *Educational and Psychological Measurement*, 68(5), 845–861.
- Markovits, Z., & Smith, M.S. (2008). Cases as tools in mathematics teacher education. In D. Tirosh & T. Wood (Eds.), *The international handbook of mathematics teacher education: Volume 2, Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (pp. 3965). Rotterdam: Sense Publishers.
- Nardi, E., Biza, I. & Zachariades, T. (2012). Warrant’ revisited: Integrating mathematics teachers’ pedagogical and epistemological considerations into Toulmin’s model of argumentation. *Educational Studies in Mathematics*, 79(2), 157-173.
- Nardi, E., Healy, L., & Biza, I. (2015). The CAPTeaM Project (Challenging Ableist Perspectives on the Teaching of Mathematics): A preliminary report. *Proceedings of the British Society for Research into the Learning of Mathematics*, 35(2), 52-57.
- Nardi, E., Healy, L., Biza, I., & Hassan Ahmad Ali Fernandes, S. (2016). Challenging ableist perspectives on the teaching of mathematics through situation-specific tasks. In Editors TBC (Eds.). *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)* (Vol. 3, pp. 347-354). Szeged, Hungary: PME.
- Nardi, E., Healy, L., Biza, I., & Fernandes, S.H.A.A. (2018). ‘Feeling’ the mathematics of disabled learners: Supporting teachers towards attuning and resignifying in inclusive mathematics classrooms. In R. Hunter, M. Civil, B. Herbel-Eisenmann, N. Planas, & D. Wagner (Eds.), *Mathematical discourse that breaks barriers and creates space for marginalized learners*, (pp. 147-170). SENSE Publications.
- Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20–26.
- Speer, M.N. (2005). Issues of methods and theory in the study of mathematics teachers’ professed and attributed beliefs. *Educational Studies in Mathematics*, 58(3), 361–391.
- Zachariades, T., Nardi, E., & Biza, I. (2013). Using multi-stage tasks in mathematics education: Raising awareness, revealing intended practice. In A.M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.).



*Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)* (Vol. 4, pp. 417-424). Kiel, Germany: PME.

Zazkis, R., Sinclair, N. & Liljedahl, P. (2013). Lesson play in mathematics education: A tool for research and professional development. New-York: Springer.

**Δημοσιεύσεις στα Ελληνικά:**

Ζαχαριάδης, Θ., Μπιζιά Ε., & Ναρδή, Ε. (2007). Διερευνώντας τη γνώση των εκπαιδευτικών μέσω υποθετικών σεναρίων διδασκαλίας: Ένα παράδειγμα από τη διδασκαλία των ορίων. Στο Χ. Σακονίδης & Δ. Δεσλή (Επς). *Πρακτικά του 2ου Πανελληνίου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών (Εν.Ε.Δι.Μ.)* (σελ. 536-546). Αλεξανδρούπολη, Ελλάδα.