AMALGAMES

AMALGAMS

Bruno POIZAT
poizat@igd.univ-lyon1.fr

WORKSHOP ON PURE MODEL THEORY
UNIVERSITY OF EAST ANGLIA, NORWICH, 4-8 JUILLET 2005

Prologue

La loi 101 (Charte de la langue française)

Principe du deux pour un□le texte français doit être écrit en caractères deux fois plus gros que ceux de la version en langue étrangère.

Two for one principle□an english (for clarity) text should be written in characters twice smaller than its french counterpart.

Exception□the english version of the text of the Law itself can be written in characters five times bigger than the french original.

Première partie. Logique
First part. Logic

1. Logique du premier ordre, avant 1950 First order Logic, before 1950

Les quantifications sont du premier ordre□elles portent sur des individus, pas sur des prédicats, des fonctions ou des relations.

Quantifications are first order□ only individuals, and not predicates, functions nor relations, are quantified.

Cette logique satisfait Löwenheim, la déduction y est axiomatisable, et elle est compacte.

This logic satisfies Löwenheim, is proof-theoretically axiomatizable, and compact.

2. Théorie des Modèles, [Tarski 1949, Tarski-Vaught 1957] Model Theory

On fixe un langage, et on compare des structures de ce langage. En l'absence de quantifications du second ordre, on ne considère que les relations définissables à partir des relations atomiques.

A language is fixed, and comparizon is made between structures of this language. Since there are no second order quantifications, the only relations under consideration are definable from the atomic ones.

Isomorphismes et plongements. Equivalence élémentaire et plongements élémentaires (au début : « arithmétiques »).

Isomorphisms and embeddings. Elementary equivalence and elementary embeddings (first name « arithmetic »).

3. Théorèmes de préservation

Preservation theorems

T est universelle (càd $\forall$-axiomatisable) ssi la classe de ses modèles est close par prise de sous-structure.

T is universal, ie $\forall$-axiomatizable, iff the class of its models is closed under substructure.

Deux théories sont dites compagnes si elles ont les mêmes conséquences universelles ⇔ chaque modèle de l'une se plonge dans un modèle de l'autre.

Two theories are companion if they have the same universal consequences ⇔ any models of one of them embeds in a model of the second.

Théorie universelle complète = théorie universelle d'une structure, ssi $T \cup \neg T^c$ est consistante, ssi T a la jeppe ⇔ npc avec théorie universelle maximale.

Complete universal theory = the universal theory of a structure = a universal theory with JEP. Dnc with a maximal universal theory.

T inductive ⇔ si M_i sont des modèles de T, avec $M_i \subseteq M_j$ si $i < j$, alors $\bigcup M_i$ est aussi modèle de T. D'après [Los & Suszko 1957], T est inductive ssi elle est $\forall\exists$-axiomatisable.

T is inductive iff it is $\forall\exists$-axiomatisable.

4. Théories complètes, [Robinson 1956] Complete theories

Notion de théorie complète, dans un langage donné.

Notion of a complete theory, in a given language.

T est modèle-complète si, pour chaque modèle M de T, $T \cup \mathrm{Diag}(M)$ est complète. <u>Cela ne signifie pas que</u> T <u>élimine les quanteurs</u>. Cela signifie que, dans T, chaque formule équivaut à une formule existentielle, ou encore que chaque formule équivaut à une formule universelle, ou encore que chaque extension de modèles de T est élémentaire. En conséquence T est inductive.

T is model-complete if, for every model M of T, $T \cup \mathrm{Diag}(M)$ is complete. <u>This does not mean that</u> T <u>eliminates quantifiers</u>. This means that, in T, every formula is equivalent to an existential formula, or that every formula is equivalent to an existential formula, or that every embedding between models of T is elementary. Ergo, T is inductive.

Une théorie modèle-complète est complète si elle a la jeppe.

A model-complete theory is complete iff it has JEP.

Deuxième partie. Amalgames
Second part. Amalgams

5. Amalgames selon [Fraïssé 1953] — According to Fraïssé

L'âge d'une relation n-aire r de base dénombrable est la famille de ses restrictions finies, considérées à l'isomorphie près. Un ensemble de (type d'isomorphie de) relations n-aires finies est un âge ssi (i) il est clos par restriction (ii) il a la Propriété de Plongement Disjoint, càd si deux de ses éléments se plongent toujours dans un même troisième (il a la jeppe).

The age of an n-ary relation r with a countable basis is the family of its restrictions to finite subsets of its basis, considered up to isomorphism. A set of (isomorphy type of) finite n-ary relations is an age iff (i) it is closed under restriction (ii) it has the Joint Embedding Property, ie if any two of its elements are embeddable in a same third one.

Problème : existence d'une relation « riche pour son âge », càd d'une relation dénombrable abritant chaque relation dénombrable de même âge.

Problem : existence of a relation which is « rich for its age », ie of a countable relation which embeds every countable relation of the same age.

Age amalgamable : si r , r’ et r’’ sont dans A , si f’ est un plongement de r dans r’ et f’’ un plongement de r dans r’’ , il existe s dans A , un plongement g’ de r’ dans s et un plongement g’’ de r’’ dans s tels que g’of’ = g’’of’’ (On ne demande pas que les bases de g’(r’) et de g’’(r’’) s’intersectent sur celle de g’(f’(r))).

An age A is amalgamable if, whenever r , r’ and r’’ are in A , f’ is an embedding of r into r’ , f’’ is an embedding of r into r’’ , then there exist s in A , embeddings g’ of r’ into s and g’’ of r’’ into s , such that g’of’ = g’’of’’ (It is not required that the basis of g’(r’) and g’’(r’’) intersect on the basis of g’(f’(r))).

Une relation (dénombrable) r est homogène si chaque plongement dans r d’une restriction finie de r s’étend en un automorphisme de r . Un âge est amalgamable ss’il existe une relation homogène de cet âge ; elle est alors unique, et riche pour son âge.

A (countable) relation is homogeneous if every embedding of a finite restriction of r into r extends to an automorphism of r . An age is amalgamable if and only if there is a homogeneous relation of the age ; this homogeneous relation is unique and rich for its age.

6. Interprétation anachronique de l’amalgame de Fraïssé

Anachronistic interpretation of Fraïssé’s amalgam

L’âge d’une relation, c’est la même chose que sa théorie universelle. L’âge T_u est amalgamable si et seulement s’il a une modèle-complétion, qui est oméga-catégorique et qui élimine les quanteurs, et dont les modèles sont les modèles existentiellement clos de T_u .

The age of a relation is the same thing as its universal theory. The age T_u is amalgamable iff it has a model-completion, which is omega-categorical and eliminate quantifiers, and whose models are the existentially closed models of T_u .

On peut considérer une théorie universelle T_u complète amalgamable de langage arbitraire. S’il y a des fonctions, ou même une infinité de relations, les existentiellement clos ne forment plus nécessairement une classe élémentaire. $\square$

We can consider a complete and amalgamable universal theory T_u in an arbitrary language. If the language has functions, or even infinitely many relations, the existentially closed models may not form an elementary class.

7. Amalgames selon [Jonsson 1956 & 1960] According to Jonsson

Si une classe de structures C , de langage L donné, satisfait aux conditions suivantes, elle a des domaines universels: {I. C contient deux structures non isomorphes}; II. C est close par isomorphisme; III. C a la jeppe; IV. C est amalgamable; V. C est inductive; VI. C satisfies Löwenheim.

If a class of structures C , in a fixed language L , satisfy the following conditions, it has universal domains: {I. C contains two non-isomorphics structures}; II. C is closed under isomorphism; III. JEP; IV. amalgamation; V. C is inductive; VI. Löwenheim.

L'homogénéité des domaines universels peut-être définie comme forte, ou bien comme modèle-théorique, associée à des va-et-vient infinis.

Homogeneity of universal domains can be defined as strong, or as model-theoretic, ie with the help of infinite back'n forth.

8. Amalgames selon [Morley-Vaught 1962] According to Morley-Vaught

Morlèisée T_m d'une théorie complète T□ on ajoute au langage un nom pour chaque formule de T□, on obtient une théorie inductive. Morley et Vaught ont observé que les modèles de T_m forment une classe de Jonsson.

Morleysation T_m of a complete theory T□ we expand the language by naming each formula of T, and obtain an inductive theory. Morley and Vaught have observed that the models of T_m form a Jonsson class.

T_m est modèle-complète, et les plongements des modèles de T_m correspondent aux plongements élémentaires des modèles de T. <u>C'est comme cela qu'est apparu le Lebensraum de la Théorie des modèles, càd la catégorie des modèles d'une théorie complète avec leurs plongements élémentaires.</u>

T_m is model-complete, and embeddings between models of T_m correspond to elementary embeddings between model of T. <u>The category of the models of a complete theory, with their elementary embeddings, has been first defined in this way.</u>

La «morlèisation» avait été utilisée par Gödel, dans un cadre de Théorie de la démonstration, pour son théorème de complétude.

«□Morleysation□» has been used proof-theoretically by Gödel, for his completeness theorem.

9. Les existentiellement clos

Existentially closed models

Les modèles existentiellement clos d'une théorie universelle complète T_u forment une classe de Jonsson. On a même le lemme d'amalgamation asymétrique : si M est existentiellement clos dans N et plongé dans N' , alors on peut amalgamer.

The existentially closed models of a complete universal theory T_u form a Jonsson class. They even satisfy the dissymmetric amalgamation lemma : if M is existentially closed in N and embeds in N' , then we can amalgamate.

Dans les modèles existentiellement clos □-universels de T_u , deux □-uples sont -équivalents ss'ils satisfont les même formules existentielles. Donc type = type existentiel ; on topologise les espaces de types en décrétant que les formules existentielles définissent des <u>fermés</u> ; cette topologie est précompacte.

In the □-universal ec models of T_u , two □-tuples are -equivalent iff they satisfy the same existential formulae. So that type = existential type ; a topology is defined on the spaces of types, with basic <u>closed</u> sets defined by existential formulae ; this is a precompact topology.

Dans les domaines universels, une formule universelle équivaut à une disjonction de formules existentielles. Si chaque formule universelle équivaut à une seule formule existentielle, c'est que les existentiellement clos forment une classe élémentaire, qui est modèle-complète. Les espaces de types sont alors compacts et totalement discontinus, mais ce n'est pas le cas général.

In the universal domains, a universal formula is equivalent to a disjunct of existential formulae. If every universal formula is equivalent to a single existential formula, the existentially closed models form an elementary class, which is modele-complete. The topologies on the spaces of types are then compact and totally disconnected, but this is not the general case.

Note. During this talk, the word compact is used in its correct (french) sense, meaning precompact and satisfying Haussdorf's separation condition.

Quand il n'y a pas de modèle-complétion, nous ne sommes pas intéressés par les extensions élémentaires saturées des modèles existentiellement clos, ni par d'autres formules que les formules existentielles.

When there is no model completion, we are not interested in the saturated elementary extensions of the existentially closed models, and we consider no other formulae than the existential ones.

10. Les théories de Jonsson de [T. Mustafin 1995] Jonsson’s theories

Une théorie T est dite de Jonsson si ses modèles forment une classe de Jonsson. Autrement dit T est inductive, avec jeppe et amalgamation. Les domaines universels de T sont les gros modèles existentiellement clos de sa théorie universelle T_u . Si T est de Jonsson, elle est contenue dans la théorie inductive T_{iec} des existentiellement clos de T_u , qui est elle-même de Jonsson, càd est amalgamable; il peut y avoir plusieurs théories de Jonsson compagnes, dites cosémantiques, ayant toutes les mêmes domaines universels.

A theory T is said to be Jonsson if its models form a Jonsson’s class, ie if T is inductive, with JEP and amalgamation. The universal domains of T are the big ec models of its universal theory T_u . If T is Jonsson, it is contained in the inductive theory T_{iec} of the ec models of T_u; in this case, T_{iec} is also Jonsson, so that its models are then amalgamable; different Jonsson theories can be companion; they are said cosemantic, having the same universal domains.

Plus faible est la théorie inductive amalgamable, meilleures sont les propriétés d'homogénéité des existentiellement clos de T_u . D'après [Ben-Yaacov & P. 2005], leurs espaces de types sont séparés précisément quand il y a une théorie de Jonsson compagne de T_u ,càd quand les modèles de T_{iec} sont amalgamables (quand tous les modèles de T_u sont amalgamables, ces espaces sont totalement discontinus).

The weakest the inductive theory with amalgamation, the best the homogeneity properties of the existentially closed models of T_u . According to [Ben-Yaacov & P. 2005], their spaces of types are Haussdorf exactly when there is a Jonsson theory which is a conpanion of T_u , ie when the models of T_{iec} are amalgamable (when all the models of T_u are amalgamable, these spaces are totally disconnected).

Méditation

The negative universal theory of a universal domain has the property that the category of subsets of its e.c. models has the amalgamation property.

ITB

11. Logique positive, [Ben-Yaacov 2003] Positive Logic

On élimine $\neg$ et □ du langage, si bien que les seules formules considérées sont existentielles-positives. Théorie universelle = ensemble de négations d'énoncés existentiels-positifs. Chat = théorie universelle complète.

We drop □ and □ from the language, so that the only formulae we consider are existential positive. Universal theory = a set of negations of existential positive sentences. Cat = a complete universal theory.

Il faut remplacer les plongements par les homomorphismes : un homomorphisme de la L-structure M dans la L-structure N est une application h de M dans N telle que, pour tout $\underline{a}$ de M et toute formule positive f , si $f(\underline{a})$ est satisfaite dans M , alors $f(h(\underline{a}))$ est satisfaite dans N ; on ne suppose pas le contraire même si f est libre de quanteurs.

One replace embeddings by homomorphisms : a homomorphism from the L-structure M into the L-structure N is an application h from M to N such that, for each $\underline{a}$ in M and every positive formula f , if $f(\underline{a})$ is satisfied in M , then $f(h(\underline{a}))$ is satisfied in N ; the converse is not assumed, even for a quantifier free f .

Les existentiellement clos sont donc les modèles terminaux M , pour lesquels tout homomorphisme h partant de M satisfait $f(\underline{a})$ ssi $h(M)$ satisfait $f(h(\underline{a}))$.
Existentially closed models are the terminal ones M , for which every homomorphism h leaving from M satisfies $f(\underline{a})$ iff $h(M)$ satisfies $f(h(\underline{a}))$.

Chat élémentaire□quand les existentiellement clos forment une classe élémentaire, càd quand les formules existentielles définissent des ouverts-fermés dans les espaces de types (bannir l’expression□the first order case□).
Elementary cat□the existentially closed models form an elementary class, ie the existential formulae define clopen sets in the spaces of types (never use the expression□the first order case□).

Chat compact, ou séparé□quand les espaces de types ont une topologie séparée, càd quand T_{iec} est de Jonsson (on peut amalgamer ses modèles).
Haussdorf, or compact cat□the space of types satisfy Haussdorf’s separation, ie T_{iec} is Jonsson (its models can be amalgamated).

Chat gras□ quand on peut exprimer positivement un minimum de propriétés négatives, de manière à pouvoir faire les constructions usuelles en théorie des modèles. Un chat compact est gras. La nuit, tous les chats sont gras.
Thick cat□ sufficiently many negative things can be expressed positively, so that the usual model theoretic constructions can be carried on. A Haussdorf cat is thick.

12. Un cas simple de morlèisation positive   A simple case of positive morleysation

Comment interpréter en logique positive le cas usuel où la négation est permise devant les formules libres?

How to interpret in Positive Logic the usual case where negating quantifier-free formulae is permitted?

Introduire un nouveau symbole $f'(\underline{x})$ pour chaque formule atomique $f(\underline{x})$, et les axiomes universels $\neg (\exists \underline{x})\, f(\underline{x}) \wedge f'(\underline{x})$. Dans les existentiellement clos, $f'(\underline{x})$ sera la négation de $f(\underline{x})$.

Introduce a new symbol $f'(\underline{x})$ for each atomic formula $f(\underline{x})$, and the universal axioms $\neg (\exists \underline{x})\, f(\underline{x}) \wedge f'(\underline{x})$. In the ec models, $f'(\underline{x})$ will be the negation of $f(\underline{x})$.

13. Morlèisation générale

Morleysation, general case

On considère un ensemble de formules □ contenant les formules atomiques, clos par □ , et sous-formules□; on remplace les homomorphismes par les □-homomorphismes□; une théorie universelle T_u complète est formée de négations d'énoncés □□□; on topologise les types des uples d'éléments des existentiellement clos de T_u en décrétant que les formules □□ définissent des fermés. La morlèisation ramène au cas ci-dessus, où □ est formé des formules libres positives.

Consider a set □ of formulae, containing atomic formulae, closed under □ , and subformulae□; replace homomorphisms by □-homomorphisms□; a complete universal theory T_u consists in negations of □□□sentences ; define a topology on the types of tuples of elements of the existentially closed models of T_u whose basic closed sets are □□-formulae. By morleysation, we can assume as above that □ is the set of positive free formulae.

Exemple□: les théories □$_n$-Jonsson de T. Mustafin.

Example□: □$_n$-Jonsson theories of T. Mustafin

14. Trouver le bon langage

Find the correct language

Corps des réels, dans le langage des anneaux ordonnés□ corps réel-clos, élémentairement comme félinement.

The field of the reals, in the ordered rings language□real-closed field.

Langage des anneaux□ élémentairement, ça ne change pas grand chose, sauf la perte de la modèle-complétion□ félinement, les existentiellement clos de la théorie universelle, ce sont les corps algébriquement clos de caractéristique nulle□

Rings language□almost the same in the elementary case, except for the loss of model-completeness□for cats, the existentially closed models of the universal theory are the algebraically closed fields of characteristic zero.

Dans le langage local, comprenant l’ordre et, pour chaque entier n, somme et produit restreints à $[-n \;\; n]$, c’est tout autre chose.

Local language, with order, and sum and product restricted to $[-n \;\; n]$ for each n□another story.

Troisième partie. Amalgames de Hrushovski

Third part. Hrushovski's amalgams

15. L'exemple primitif, [Hrushovski 1988, 1993] Ab initio

Une relation ternaire r(x,y,z)□; un lien = un triplet satisfaisant r□; ▯(A) = nombre de points – nombre de liens□; la théorie universelle T_0□ déclare que ▯(A) ≥ 0 pour tout A □; clôture autosuffisante de A dans B □: le plus petit C contenant A de ▯(C) minimum□; si $\mathrm{Cla}_B(A) = A$, on dit que A est autosuffisant dans B □; $d_B(A)$ = ▯($\mathrm{Cla}_B(A)$) .

A ternary relation r(x,y,z)□; a link = a triple satisfying r□; ▯(A) = number of points – number of links□; the universal theory T_0□ states that ▯(A) ≥ 0 for every A □; self-sufficient closure of A in B □: the smallest C containing A with a minimal ▯(C) ; if $\mathrm{Cla}_B(A) = A$, we say that A is self-sufficient in B□; $d_B(A)$ = ▯($\mathrm{Cla}_B(A)$) .

On peut amalgamer les extensions autosuffisantes de modèles de T_0 : on a même l'amalgamation asymétrique : si A est autosuffisant dans B et plongé dans C, l'amalgame libre de B et de C au-dessus de A est modèle de T_0. On obtient un homogène-universel M_ω pour les plongements autosuffisants, qui est de rang de Morley oméga ; son générique a une géométrie inconnue auparavant ; sa théorie T_ω est « modèle-complète pour les plongements autosuffisants » : le type de X, c'est le type libre de $Cla(X)$.

Self-sufficient extensions of models of T_0 can be amalgamated ; they even satisfy dissymmetric amalgamation : if A is self-sufficient in B and embedded into C, the free amalgam of B and C over A is a model of T_0. We obtain an homogeneous-universal M_ω for self-sufficient embeddings, which has Morley rank omega ; the geometry of its generic was previously unknown ; its theory T_ω is « model-complete for self-sufficient embeddings » : the type of X is the free type of $Cla(X)$.

16. Deux chats maigres — Two thin cats

Comment faire entrer $M_{□}$ dans un cadre félin□

How to make a cat of $M_{□}$□

Modèles existentiellement clos de T_0□ Pour tout X , □(Cla(X)) = d(X) = 0 . L'homogène-universel n'est pas $M_{□}$□ mais c'est le modèle premier de $T_{□}$, et ce chat atomique n'est pas séparé.

Existentially closed models of T_0□ For every X , □(Cla(X)) = d(X) = 0 . The homogeneous-universal model is not $M_{□}$□ but the prime model of $T_{□}$, and this atomic cat is not haussdorf.

Introduire des prédicats $d(\underline{x}) \geq n$ et les axiomes universels □ (□ $\underline{x}$) (□$\underline{y}$) $d(\underline{x}) \geq n$ □ □($\underline{x}$,$\underline{y}$) < n□ L'homogène-universel est bien $M_{□}$, mais le langage est trop fort et le chat n'est pas séparé.

Introduce predicates $d(\underline{x}) \geq n$ and universal axioms □ (□ $\underline{x}$) (□$\underline{y}$) $d(\underline{x}) \geq n$ □ □($\underline{x}$,$\underline{y}$) < n □ The homogeneous-universal model is $M_{□}$, but the language is too rich and the cat is not haussdorf.

17. Morlèiser l'exemple primitif — Morleysation of the initial example

Trouver une morlèisation partielle du langage $\{r\}$ pour laquelle plongement = plongement autosuffisant = plongement conservant $Cla(X)$.

Find a partial morleysation of the langage $\{r\}$ for which embedding = self-sufficient embedding = embedding preserving $Cla(X)$.

Si $A \subset B$, le solde de B sur A est $s(B/A) = \delta(B) - \delta(A)$; $b \in Cla(A)$ ssi $b \in B$ tq, pour tout $B' \subset B$, $s(B/A \cup B') < 0$. On considère toutes les formules $f(\underline{x},\underline{y})$ décrivant un tel exemple de solde négatif, et on morlèise les formules $(\exists\, \underline{y})\ f(\underline{x},\underline{y})$ <u>et leurs négations</u> $(\forall\, \underline{y})\ \neg f(\underline{x},\underline{y})$.

If $A \subset B$, the balance of B over A is $s(B/A) = \delta(B) - \delta(A)$; $b \in Cla(A)$ iff $b \in B$ st, for each $B' \subset B$, $s(B/A \cup B') < 0$. We consider all the formulae $f(\underline{x},\underline{y})$ describing such an example of a negative balance, and we morleyse the formulae $(\exists\, \underline{y})\ f(\underline{x},\underline{y})$ <u>and their negations</u> $(\forall\, \underline{y})\ \neg f(\underline{x},\underline{y})$.

Il est alors évident que le chat est totalement discontinu (dans ce cas précis, il est élémentaire).

It is then clear that the cat is totally disconnected (in this very case, it is elementary).

18. Collapser l'exemple primitif

Collapse of the initial example

Dans $M_{\square}$, si s(cla(B)/cla(A)) = d , RM(B/A) = □.d + n . Les types de solde nul sont donc de rang de Morley fini. On introduit alors des théories universelles T_i qui ne leur permettent de se réaliser qu'un nombre fini de fois□ ces nombres sont choisis de manière à conserver l'amalgamation autosuffisante (Lemme d'amalgamation économique qui, lui, est symétrique).

In $M_{\square}$, if s(cla(B)/cla(A)) = d , RM(B/A) = □.d + n . The types with a null balance have a finite Morley rank. We consider universal theories T_i allowing them to be realized only a finite number of times□ these numbers are choosen in a way preserving self-sufficient amalgamation (Thrifty amalgamation lemma, a symmetric lemma).

Dans les T_i les types de solde nul deviennent algébriques□ il est clair que tous ces chats sont compacts□ en fait, ils sont tous élémentaires□ ce sont des ensembles fortement minimaux, de géométries inconnues auparavant.

In the T_i's , the types with a null balance become algebraic□ all these cats are clearly compact□ in fact, they are all elementary, defining strongly minimal sets with new geometries.

19. Un autre chat maigre

Another thin cat

Si T_i est une théorie universelle collapsée, ses existentiellement clos (sans morlèisation) donnent en fait les mêmes domaines universels, avec les mêmes types. Mais ce n'est pas le bon chat, car le langage est trop faible : les $(\exists \underline{y})\, f(\underline{x},\underline{y})$ décrivant des fragments de clôture définissent des fermés, mais pas des ouverts car leurs négations absentes ! Les ensembles de types sont les mêmes, mais il n'ont pas la bonne topologie, et ce chat, bien sûr, n'est pas compact.

If T_i is a collapsed universal theory, its existentially closed (without morleysation) models give in fact the expected universal domains. But this is not the right cat, because of the weakness of the language: the $(\exists \underline{y})\, f(\underline{x},\underline{y})$ describing fragments of closure define closed but non open sets, since their negations are missing! The set of types are the same, but their topology is weaker than the expected one, and this cat, of course, is not haussdorf.

Les chats non compacts sont dangereux ; une topologie compacte est maximale parmi les topologies précompactes, mais on peut affaiblir une topologie compacte à condition de renoncer à la séparation !

Non compact cats are dangerous; a compact topology is maximal among the precompact ones, but we can weaken a compact topology provided we renounce to Haussdorf's separation!

20. Why did'nt they ask Evans ?   Pourquoi pas Evans ?

G graphe orienté, sans cycles orientés, de valence sortante au plus deux ; clôture = clôture par accessibilité ; en amalgamant les ensembles clos, on obtient une théorie T stable et triviale.

Directed graph G , without oriented cycles, with out-valency ≤ 2 ; closure is by accessibility ; amalgamating closed sets, we obtain a stable and trivial theory T .

□ graphe non orienté, obtenu en oubliant l'orientation dans un graphe ci-dessus ; ils forment une classe élémentaire universelle (toute restriction finie a un point de valence ≤ 2) ; $Cla_{\square}(A)$ est l'intersection des $Cla_G(A)$ pour toutes les orientations possibles G de □ ; A est clos si et seulement si, pour tout X fini non-contenu dans A , X-A a un point lié à au plus deux points de X ; on amalgame les plongements autosuffisants et on obtient une théorie □ <u>non-triviale</u>, interprétable dans T !

Undirected graph □ , obtained by forgetting the orientation in a graph as above ; they form an elementary universal class (every non void finite restriction has a point of valency at most two) ; $Cla_{\square}(A)$ is the intersection of the $Cla_G(A)$ for all possible orientations G of □ ; A is closed iff, for every finite X not contained in A , X-A has a point which is linked to at most two points in X ; we amalgamate self-sufficient embeddings to obtain a <u>non trivial</u> theory □ interpretable in T !

21. Corps noirs
Black fields

K un corps algébriquement clos, de caractéristique $c = 0$ ou p , avec un sous-ensemble N □, □(K) = 2.d°trans(K) – card(N) .

K an algebraically closed field, of caracteristic $c = 0$ or p , with a subset N □, □(K) = 2.transd°(K) – card(N) .

T_0 est la classe des corps colorés K tel que □(k) ≥ 0 pour tout sous-corps k de K . Axiomatisé par □ (□ x_1 , … x_{2n+1}) $V(\underline{x})$ □ «□les x_i sont distincts et noirs□ , où V est une variété de dimension n . L'amalgame autosuffisant libre aboutit à une théorie $T_□$ de corps colorés de rang de Morley 2.□ .

T_0 is the class of colored fields K such that □(k) ≥ 0 for every subfield k of K . Axiomatized by □ (□ x_1 , … x_{2n+1}) $V(\underline{x})$ □ «□the x_i are distinct and black» , where V is a variety of dimension n . The free self-sufficient amalgam leads to a theory $T_□$ of colored fields of Morley rank 2.□ .

On définit des théories universelles collapsées T_i amalgamables, pour obtenir des corps de rang deux. L'autosuffisance étant morlèisable comme dans le cas de l'exemple initial, on obtient dans tous les cas un chat très gras, à topologie totalement discontinue.

We define collapsed universal theories T_i with amalgamation, to obtain fields of rank two. Since self-sufficiency is morleysable as in the case of the initial example, we obtain in every case an american cat, with a totally disconnected topology.

Ils ne sont pas tous élémentaires; pour que les domaines universels puissent être saturés, il faut de l'espacement dans le collapsage.

Not all of them are elementary; for the universal domains to be saturated, the collapsing conditions should be somehow spaced.

22. Corps verts   Green fields

K un corps alg. clos, de caract. $c = 0$ ou p , avec un sous-groupe multiplicatif V divisible sans torsion; $\delta(K) = 2.\text{d°trans}(K) - \text{dimension Q-linéaire}(V)$.

K an algebraically closed field, of caracteristic $c = 0$ or p , with a divisible torsion-free multiplicative subgroup V ; $\delta(K) = 2.\text{transd°}(K) - \text{Q-linear dimension}(V)$.

T_0 est la classe des corps colorés K tels que $\delta(k) \geq 0$ pour tout sous-corps k . On définit sans problème l'amalgame autosuffisant libre en toute caractéristique (et même si on introduit de la torsion dans V). Mais on ne sait collapser l'amalgame.

T_0 is the clas of colored fields K such that $\delta(k) \geq 0$ for every subfield k of K . There is no problem to define the free self-sufficient amalgam in any characteristic (and even if some torsion is tolerated in V). But there is no known way to collapse this amalgam.

En caractéristique nulle, cet amalgame autosuffisant libre est une structure de rang de Morley 2. [illegible] ; pour axiomatiser sa théorie, on doit montrer que certaines familles de tores sont finies. En caractéristique p , on ne sait même pas si la classe T_0 est élémentaire !

In zero characteristic, this free self-sufficient amalgam is a structure of Morley rank 2. [illegible] ; to axiomatize its theory, one needs to show that certain families of torus are finite. In characteristic p , it is not even known if the class T_0 is elementary !

23. Problématique des Amalgames de Hrushovski

Problematic of Hrushovski's Amalgams

<u>Construction</u>

a. Définir une notion d'autosuffisance permettant un amalgame libre (sauf pour Evans, il faut une dimension négative modulaire).

b. Collapser cet amalgame, càd restreindre la classe T_0 tout en conservant une amalgamation économique (facile si la dimension négative est triviale).

c. Vérifier que l'objet construit a les propriétés qu'on espérait.

<u>Construction</u>.

a. Define a notion of selfsufficiency allowing free amalgamation (except for Evans, a modular negative dimension is needed).

b. Collapse this amalgam, ie restrict the class T_0 while preserving thrifty amalgamation (easy vhen the negative dimension is trivial).

c. Check that the constructed structure has the expected properties.

Axiomatisation

Approximer finiment, quand c’est possible, des conditions de nature infinitaire.

a. Axiomatiser T_0 ; évident si la dimension négative est omega-catégorique ; cela garantit que la clôture autosuffisante est incluse dans la clôture algébrique modèle-théorique.

b. Axiomatiser l’amalgame libre, c’est-à-dire trouver sa théorie inductive, formée d’axiomes $(\forall\ \underline{x})(\exists\ \underline{y})\ f(\underline{x}) \rightarrow g(\underline{x},\underline{y})$; l’autosuffisance n’intervient ni dans la protase ni dans l’apodose de ces conditions.

c. Axiomatiser les collapsés, ce qui peut nécessiter de l’uniformité dans le collapse ; les protases demandent un peu d’autosuffisance.

d. Ou au moins morlèiser l’autosuffisance, pour garantir des chats gras.

Axiomatisation

Finitely approximate, when possible, conditions of infinitary nature.

a. Axiomatize T_0 ; evident if the negative dimension is omega-categorical ; it implies that the selfsufficient closure is included in the model-theoretic algebraic closure.

b. Axiomatize the free amalgam, ie find its inductive theory, formed of axioms $(\forall\ \underline{x})(\exists\ \underline{y})\ f(\underline{x}) \rightarrow g(\underline{x},\underline{y})$; autosufficiency appears neither in the protasis nor in the apodosis of these conditions.

c. Axiomatize the collapses ; some uniformity may be necessary ; protasis may need a touch of selfsufficiency.

d. Or at least morleyse selfsufficiency, to obtain thick cats.

REFERENCES

[Ben-Yaacov 2003] Itay BEN-YAACOV, *Positive model theory and compact abstract theories,* **Journal of Mathematical Logic,** vol. 3, 85-118

[Ben-Yaacov 2003bis] Itay BEN-YAACOV, *Thickness, and a categoric point of view of type-space functors,* **Fundamentae Mathematicae,** vol. 179, 199-224

[Ben-Yaacov & Poizat 2005] Itay BEN-YAACOV & Bruno POIZAT, en préparation

[Evans 2003] David EVANS, *Ample dividing,* **The Journal of Symbolic Logic,** vol. 68, 1385-1402

[Fraïssé 1953] Roland FRAISSE, *Sur certaines relations qui généralisent l'ordre des nombres rationnels,* **C.R. Acad. Sci. Paris,** vol. 237, 540-542

[Goode 1989] John B. GOODE, *Hrushovski's geometries,* **Seminarberichte 104, Humboldt Uni.** 106-117

[Hodges 1993] Wilfrid HODGES, **Model Theory,** Cambridge University Press

[Jonsson 1956] Bjarni JONSSON, *Universal relational systems,* **Mathematica Scandinavia,** vol. 4, 193-208.

[Jonsson 1960] Bjarni JONSSON, *Homogeneous universal relational systems,* **Math. Scand.,** vol. 8, 137-142

[Hrushovski 1992] Ehud HRUSHOVSKI, *Strongly minimal expansions of algebraically closed fields,* **Israel Journal of Mathematics, vol.** 79, 129-151

[Hrushovski 1993] Ehud HRUSHOVSKI, *A new strongly minimal set,* **A.P.A.L.,** vol. 62, 147-166

[Los & Suszko 1957] Jerzy LOS & R. SUSZKO, *On the extending of models (IV),* **Fundamenta Mathematicae,** vol. 44, 343-347

[Morley & Vaught 1962] Michael MORLEY & Robert VAUGHT, *Homogeneous universal models,* **Mathematica Scandinavia,** vol. 11, 37-57

[Mustafin & Nurkhaidarov 1995] Tölende MUSTAFIN & Ermek NURKHAIDAROV, *Description des théories de Jonsson de polygônes sur un groupe* (en russe), **Sbornik nauchnyh trudov** (Qaragandy), 67-73

[Mustafin 1998] Tölende MUSTAFIN, *Conditions de Jonsson généralisées et théories de Jonsson généralisées d'algèbres de Boole* (en russe), **Math. Trudy** (Novosibirsk), 135-197

[Mustafin 2002] Yerulan MUSTAFIN, *Quelques propriétés des théories de Jonsson,* **The Journal of Symbolic Logic,** vol. 67, 528-536

[Poizat 1985] Bruno POIZAT, **Cours de Théorie des Modèles,** Nur al-Mantiq wal-Ma'arifah (Traduction par Moses KLEIN, **A Course in Model Theory,** Springer, 2000)

[Poizat 1999] Bruno POIZAT, *Le carré de l'égalité,* **The Journal of Symbolic Logic,** vol. 64, 1339-1355

[Poizat 2001] Bruno POIZAT, *L'égalité au cube,* **The Journal of Symbolic Logic,** vol. 66, 1647-1676

[Poizat 2002] Bruno POIZAT, *Amalgames de Hrushovski, une tentative de classification,* **Tits buildings and the Model Theory of groups** (ed. K. Tent), Cambridge university Press, 195-214

[Robinson 1956] Abraham ROBINSON, **Complete Theories,** North Holland

[Tarski 1949] Alfred TARSKI, *Arithmetical classes and types of mathematical systems,* Abstracts **Bull. Amer. Math. Soc.,** vol. 55, 1192

[Tarski &Vaught 1957] Alfred TARSKI & Robert VAUGHT, *Arithmetical extensions of relational systems,* **Compositio Mathematica,** vol. 13, 81-102