

**UNIVERSITE DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS  
FACULTE DES SCIENCES**

Institut Non Linéaire de Nice UMR 6618 CNRS-UNSA

**UNIVERSITE DE L'OUEST DE TIMISOARA**

**THESE**

présentée pour obtenir le titre de

**Docteur en SCIENCES**

Mention "Mathématiques"

par

**Emilian PARAU**

**Ondes interfaciales de flexion-gravité et de  
capillarité-gravité**

Soutenue le 22 Septembre 2000 devant le jury composé de :

M.	Jean-Michel GHIDAGLIA	Président
M.	Frédéric DIAS	Directeur de thèse
M.	Viorel RADU	Directeur de thèse
M.	Jean-Marc VANDEN-BROECK	Rapporteur
M.	François CHARRU	Rapporteur
M.	Stefan BALINT	Examineur
Mme.	Mariana COURCELLE	Examineur
M.	Patrice LAURE	Examineur



# Remerciements

Le travail présenté ici a été réalisé à l'Institut Non-Linéaire de Nice (INLN) et au Centre de Mathématique et de Leurs Applications (CMLA) de l'ENS Cachan.

Mes remerciements vont donc tout d'abord aux directions de ces deux organismes qui m'ont accueilli dans leur locaux et m'ont donné les moyens d'effectuer ce travail.

Il me semble impossible de remercier ici toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire. Qu'elles trouvent ici l'expression de ma gratitude.

Toutefois, je tiens à remercier particulièrement Monsieur Jean-Michel Ghidaglia qui a accepté la présidence du jury.

J'exprime toute ma reconnaissance à Monsieur Frédéric Dias qui, en tant qu'enseignant m'a initié dans le domaine des vagues et, en tant que directeur de thèse m'a fait travailler sur les deux sujets de la thèse. Son aide et ses conseils ont été précieux tout au long de ces trois années d'étude.

Je tiens à remercier Monsieur Viorel Radu pour ces conseils et pour l'aide qu'il m'a donné en Roumanie.

Je suis très sensible à l'intérêt qu'ont porté Messieurs François Charru et Jean-Marc Vanden-Broeck à l'égard de ce travail. Je leur suis reconnaissant pour leur participation au jury en tant que rapporteurs.

J'adresse toute ma sympathie à Madame Mariana Courcelle et Messieurs Stefan Balint et Patrice Laure qui ont accepté le rôle d'examineur.

Je suis reconnaissant à l'ensemble du personnel et des doctorands des deux laboratoires pour leur aide et leur sympathie. Plus particulièrement, je tiens à remercier Philippe, Guillaume, Karim pour leur aide et leur soutien moral.

Enfin, un grand merci à ma femme Ramona, pour m'avoir encouragé constamment durant tous ces années de thèse et d'avoir supporté avec patience mes longues absences en France, et aussi à ma famille pour leur soutien.



# Rezumat

Aceasta teză este consacrată studiului undelor interfaciale în două probleme distincte : undele care se propagă la interfața dintre un strat de gheață și un strat de apă și undele care se propagă la interfața dintre două straturi orizontale de fluide de densități diferite, fluidul superior având suprafața liberă.

În prima parte se studiază undele solitare de gravitate-flexiune generate de un vehicul care se deplasează pe un strat de gheață aflat deasupra unui strat de fluid de adâncime finită. Mai întâi, câteva rezultate experimentale și liniare sunt prezentate. Problema neliniară este rezolvată într-o primă fază presupunând că vehiculul nu se află pe gheață. O analiză a problemei bazată pe teoria sistemelor dinamice și a formelor normale este utilizată pentru a studia deformarea stratului de gheață. Undele solitare sub forma pachetelor de unde sunt calculate. De asemenea, sunt prezentate rezultate numerice bazate pe ecuațiile Euler complete. Apoi vehiculul este reintrodus și o ecuație neliniară Schrödinger forțată este obținută. Pentru viteze apropiate de viteza critică corespunzând minimului relației de dispersie descrierea soluțiilor problemei este făcută convenabil prin această ecuație neliniară Schrödinger forțată.

În a doua parte a tezei sunt studiate undele interfaciale care pot apare între două straturi de fluide, când fluidul superior este în contact cu aerul. După ce relația de dispersie este studiată pentru undele interfaciale de gravitate și de capilaritate-gravitate, forma normală pentru un caz nou este prezentată și este studiată numeric existența undelor solitare pentru sistemul redus. Apoi, cu ajutorul unei scheme numerice bazate pe dezvoltarea în serie Fourier a variabilelor fizice, se studiază undele periodice de gravitate care pot apare. Unde solitare generalizate, unde periodice rapide și unde periodice rezonante sunt prezentate.



# Table des matières

<b>Rezumat</b>	<b>5</b>
<b>I Ondes solitaires en présence d'une couche de glace</b>	<b>11</b>
<b>Introduction</b>	<b>13</b>
<b>1 Résultats expérimentaux</b>	<b>17</b>
<b>2 Formulation du problème</b>	<b>21</b>
2.1 Equations dans le fluide . . . . .	21
<b>3 Le problème linéarisé</b>	<b>27</b>
3.1 Le calcul formel de la déformation de la couche de glace . . . . .	27
3.2 L'étude de la déformation . . . . .	28
<b>4 Analyse du problème nonlinéaire</b>	<b>31</b>
4.1 Formulation du problème sous la forme d'un système dynamique . . . . .	31
4.2 Etude du spectre . . . . .	34
4.3 Réduction à la variété centrale . . . . .	36

4.4	Forme normale . . . . .	39
4.4.1	Calcul de coefficients . . . . .	40
4.4.2	Solutions de la forme normale . . . . .	43
<b>5</b>	<b>Résolution numérique du problème nonlinéaire</b>	<b>47</b>
5.1	Schéma numérique . . . . .	47
5.2	Résultats numériques . . . . .	50
<b>6</b>	<b>Résultats faiblement nonlinéaires en présence d'un véhicule se déplaçant sur la couche de glace</b>	<b>53</b>
6.1	Dérivation de l'équation de Schrödinger nonlinéaire forcée . . . . .	53
6.2	Solutions pour l'équation de Schrödinger nonlinéaire forcée . . . . .	55
6.2.1	Ondes solitaires . . . . .	56
	<b>Discussion</b>	<b>65</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>67</b>
	<b>Annexe A : Estimation de la résolvante</b>	<b>71</b>
	<b>Annexe B : Compléments numériques</b>	<b>75</b>
	<b>Annexe C : Solutions bornées pour l'équation de Schrödinger nonlinéaire forcée</b>	<b>77</b>
C.1	Ondes périodiques . . . . .	77
C.2	Ondes "périodiques-solitaires" . . . . .	78

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	9
C.3 Ondes solitaires noires . . . . .	80
<b>II Ondes interfaciales en présence d'une surface libre</b>	<b>85</b>
<b>Introduction</b>	<b>87</b>
<b>7 Formulation mathématique du problème</b>	<b>91</b>
7.1 Equations du problème . . . . .	91
7.2 Formulation du problème sous la forme d'un système dynamique . . . . .	92
<b>8 Etude de la relation de dispersion</b>	<b>97</b>
8.1 Cas de gravité pure . . . . .	97
8.2 Cas où la tension superficielle et/ou interfaciale est présente . . . . .	99
<b>9 Forme normale dans le cas d'une valeur propre triple imaginaire</b>	<b>105</b>
<b>10 Etude numérique des ondes de gravité périodiques</b>	<b>111</b>
10.1 Formulation . . . . .	111
10.2 Etude de la relation de dispersion . . . . .	112
10.3 Schéma numérique pour les ondes périodiques . . . . .	114
10.4 Ondes longues . . . . .	118
10.5 La résonance 1 :2 . . . . .	121
10.6 Ondes périodiques rapides . . . . .	122
<b>Discussion</b>	<b>131</b>

**Bibliographie** **133**

**Table des figures** **135**

---

## Partie I

# Ondes solitaires en présence d'une couche de glace

---



# Introduction

L'étude de la déformation d'une couche de glace engendrée par un véhicule qui se déplace sur la glace est importante pour au moins deux applications majeures, qui sont tout à fait différentes : l'usage de véhicules avec coussin d'air pour briser la glace [2], et la transformation de masses d'eau en routes et pistes d'atterrissage pendant l'hiver dans certaines régions géographiques [19].

La relation de dispersion pour les ondes sous une couche de glace dépend du modèle utilisé pour représenter la couche de glace. Une relation classique est donnée par

$$c(k)^2 = \left( \frac{g}{k} + \frac{Dk^3}{\rho} \right) \tanh(kH), \quad \text{où } D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (0.0.1)$$

Dans (0.0.1),  $k$  est le nombre d'onde,  $c$  la vitesse,  $g$  l'accélération due à la gravité,  $\rho$  la densité de l'eau,  $H$  la profondeur moyenne de l'eau,  $D$  la rigidité intrinsèque en flexion de la glace,  $h$  l'épaisseur de la couche de glace,  $E$  le module de Young pour la glace et  $\nu$  la constante de Poisson.

L'équation (0.0.1) est représentée dans la Fig. 1 pour les conditions typiques décrites dans [26] et présentées dans la Table 1.

Une propriété évidente de la relation de dispersion (0.0.1) est qu'elle admet un minimum, pour toutes les valeurs possibles des paramètres. Pour les paramètres donnés dans la Table 1, ce minimum est atteint pour  $k = 0.334 \text{ m}^{-1}$  (c.-à-d. une longueur d'onde de 18.8 m). La

$E$	$\nu$	$h$	$D$	$H$	$c$	$\rho$
$5.1 \times 10^8 \text{ N/m}^2$	1/3	0.17 m	$2.35 \times 10^5 \text{ Nm}$	6.8 m	$0 < c < 9 \text{ m/s}$	$1026 \text{ kg/m}^3$

TAB. 1 – Paramètres physiques pour les expériences dans [26].

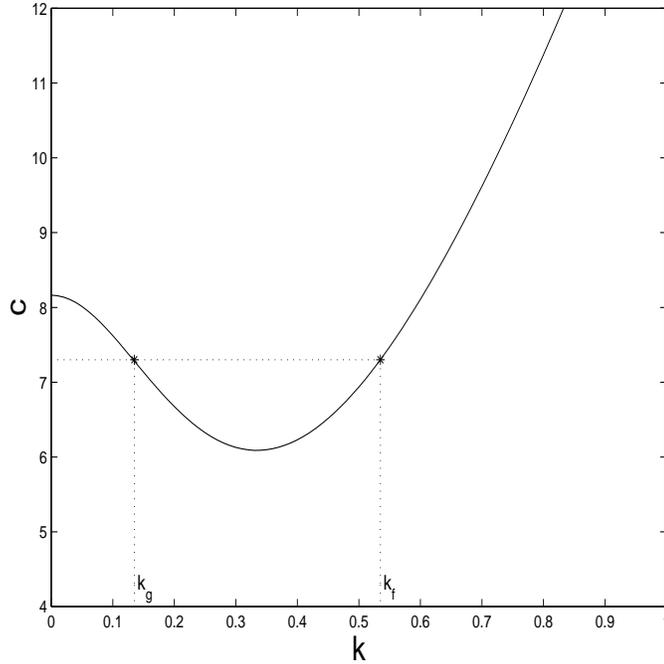


FIG. 1 – La vitesse de phase  $c$  dans  $\text{m/s}$  en fonction du nombre d'onde  $k$  dans  $\text{m}^{-1}$  pour les paramètres correspondants aux expériences de Takizawa [26]. Le minimum de la vitesse est  $c_{\min} = 6.09 \text{ m/s}$  et le nombre d'onde correspondant est  $k = 0.334 \text{ m}^{-1}$ . Quand la vitesse est plus grande que  $c_{\min}$  et plus petite que la vitesse d'onde longue  $c(0)$ , il existe deux nombres d'ondes correspondants,  $k_g$  dans la partie de gravité et  $k_f$  dans la partie de flexion.

vitesse et la fréquence correspondantes sont  $c = 6.09 \text{ m/s}$  et  $f = 0.32 \text{ Hz}$ . En profondeur infinie, ces valeurs seraient  $c = 6.15 \text{ m/s}$ ,  $f = 0.34 \text{ Hz}$ ,  $k = 0.346 \text{ m}^{-1}$  (c.-à-d. une longueur d'onde de 18.2 m). Même si la présence du minimum est évidente, certaines de ses conséquences n'ont été que récemment découvertes. Plus précisément, quelques études récentes ont été consacrées à ce minimum dans le contexte des ondes de capillarité-gravité (voir par exemple Dias & Kharif [7] pour une revue). Malheureusement, les expériences pour les ondes de capillarité-gravité sont difficiles à effectuer dans ce régime. On rappelle qu'en profondeur infinie, la vitesse, la fréquence et la longueur d'onde du minimum sont  $c = 23.2 \text{ cm/s}$ ,  $f = 13.4 \text{ Hz}$  et  $2\pi/k = 1.73 \text{ cm}$ . Pour les ondes à l'interface entre l'eau et une couche de glace, le régime correspondant au minimum s'obtient facilement et beaucoup de résultats expérimentaux sont disponibles. La présence du minimum représente une difficulté réelle pour la version linéarisée du problème. A titre d'exemple, prenons une

distribution de pression de petite amplitude le long de la couche de glace et linéarisons les équations autour d'un écoulement uniforme avec vitesse constante  $c$ . Quand on résout les équations linéaires obtenues, on trouve que pour  $c > c_{\min}$  (et pour  $c$  plus petite que la vitesse d'onde longue  $c(0)$ ) les solutions sont caractérisées par des trains d'ondes à l'extrémité du domaine (des ondes de gravité en aval avec le nombre d'onde  $k_g$  et des ondes de flexion en amont avec le nombre d'onde  $k_f$  - voir Fig. 1), tandis que pour  $c < c_{\min}$  les solutions approchent un écoulement uniforme avec vitesse constante  $c$  à l'infinie. L'amplitude des ondes périodiques étant proportionnelle à  $1/(k_f - k_g)$ , la linéarisation échoue dans le voisinage de  $c = c_{\min}$ . D'après Squire et al. [25], le problème linéarisé a été résolu pour la première fois dans le contexte des ondes de flexion-gravité par Kheysin en 1963 pour les solutions stationnaires et en 1971 pour les solutions non-stationnaires.

Le plan d'étude est le suivant. Tout d'abord, on présente brièvement les résultats expérimentaux obtenus par Takizawa [26]. Dans le chapitre suivant on donne la formulation du problème nonlinéaire. Par la suite, le problème est linéarisé et quelques solutions du problème linéarisé sont montrées. On introduit ensuite les termes nonlinéaires pour pouvoir étudier les solutions aux vitesses proches de  $c_{\min}$ . Le problème est premièrement résolu en l'absence de charge se déplaçant sur la glace. L'analyse repose sur la théorie des systèmes dynamiques. Des ondes solitaires sous la forme de paquets d'onde sont calculées. Dans le chapitre 5 des résultats numériques basés sur les équations complètes sont présentés. Enfin la charge se déplaçant sur la glace est introduite dans le chapitre 6 et une équation nonlinéaire de Schrödinger forcée est obtenue. On trouve en particulier des ondes solitaires comme solutions de cette équation. Les autres solutions bornées sont données dans l'annexe C.



# Chapitre 1

## Résultats expérimentaux

Beaucoup d'expériences ont été réalisées pour étudier les effets des véhicules qui se déplacent sur une couche de glace, surtout dans les régions arctiques. On présente dans ce chapitre brièvement les résultats expérimentaux obtenus par Takizawa en 1981 au Japon en utilisant une motoneige. Les paramètres physiques sont donnés dans la Tab. 1. En reprenant la classification donnée par Takizawa [28] pour les profils obtenus dans les tests dynamiques effectués, les résultats peuvent être résumés de la manière suivante :

- (i) une région quasi-statique ( $0 < c/c_{\text{crit}} < 0.6$ ), où tous les profils sont similaires au profil de la déviation statique de la couche de glace. La vitesse  $c_{\text{crit}}$  est estimée par Takizawa à 5.8-6 m/s, correspondant au minimum de la courbe de dispersion  $c_{\text{min}}$ .
- (ii) une région de transition graduelle ( $0.6 \leq c/c_{\text{crit}} < 0.85$ ), où la dépression devient progressivement plus profonde et plus étroite.
- (iii) une région de transition rapide ( $0.85 \leq c/c_{\text{crit}} < 1$ ), où la dépression devient rapidement plus profonde.
- (iv) une région deux-ondes ( $1 \leq c/c_{\text{crit}} < 1.5$ ), où les deux ondes provenant des deux branches de flexion et de gravité de la courbe de dispersion sont clairement observées. Elles sont générées pour des vitesses juste un peu plus grande que  $c_{\text{crit}}$ . La profondeur de la dépression est maximale et la largeur minimale pour  $c = c_{\text{crit}}$ . Quand la vitesse augmente, la dépression inverse sa tendance antérieure et devient progressivement moins profonde et plus large.
- (v) une région une-onde ou pseudo-non-chargée ( $1.5 \leq c/c_{\text{crit}}$ ), où la dépression est plus petite que pour  $c = 0$ . La glace sous le véhicule n'est plus en dépression, mais elle est un

peu élevée. L'onde qui était derrière le véhicule a disparu et la seule onde observée est l'onde qui est devant le véhicule.

Dans la Fig. 1.1 ces résultats sont montrés et dans la Fig. 1.2 est donnée l'évolution de la profondeur de dépression. Les deux figures sont tirées de Takizawa [28].

Notre étude est concentrée sur les régions où la vitesse du véhicule est proche de  $c_{\text{crit}}$ . Pratiquement on étudie la région de transition rapide (iii). On va essayer d'expliquer avec notre modèle mathématique le fait que la profondeur de la dépression reste finie même si  $c \approx c_{\text{crit}}$ , contrairement aux modèles linéaires.

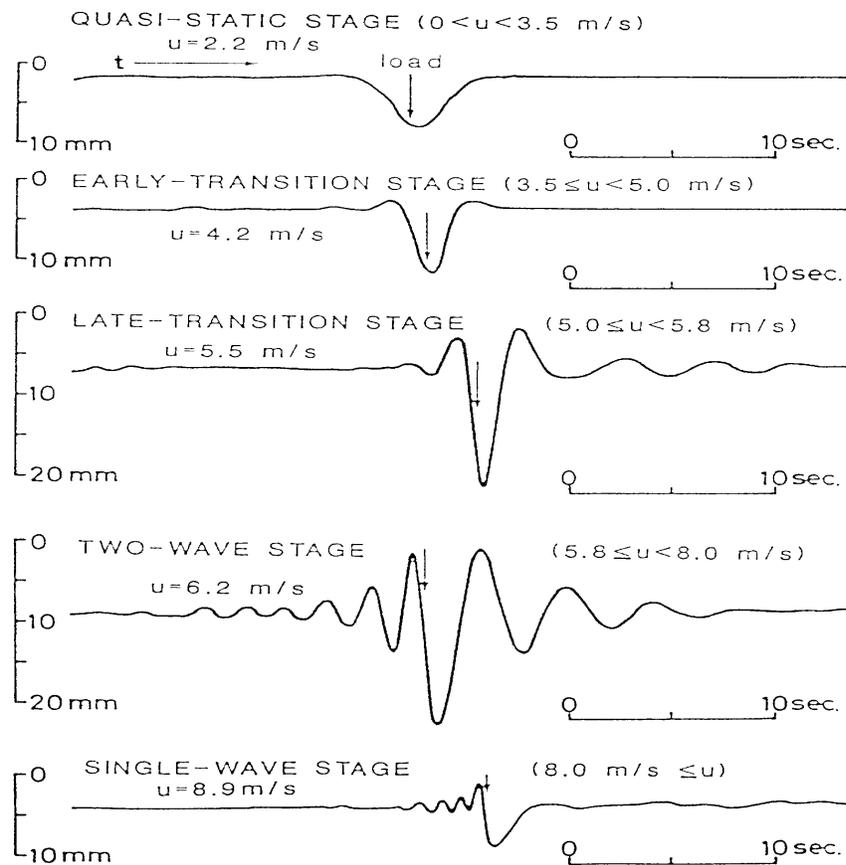


FIG. 1.1 – Reproduction de la figure 6 de Takizawa [27] : le profil de la couche de glace pour des vitesses diverses.

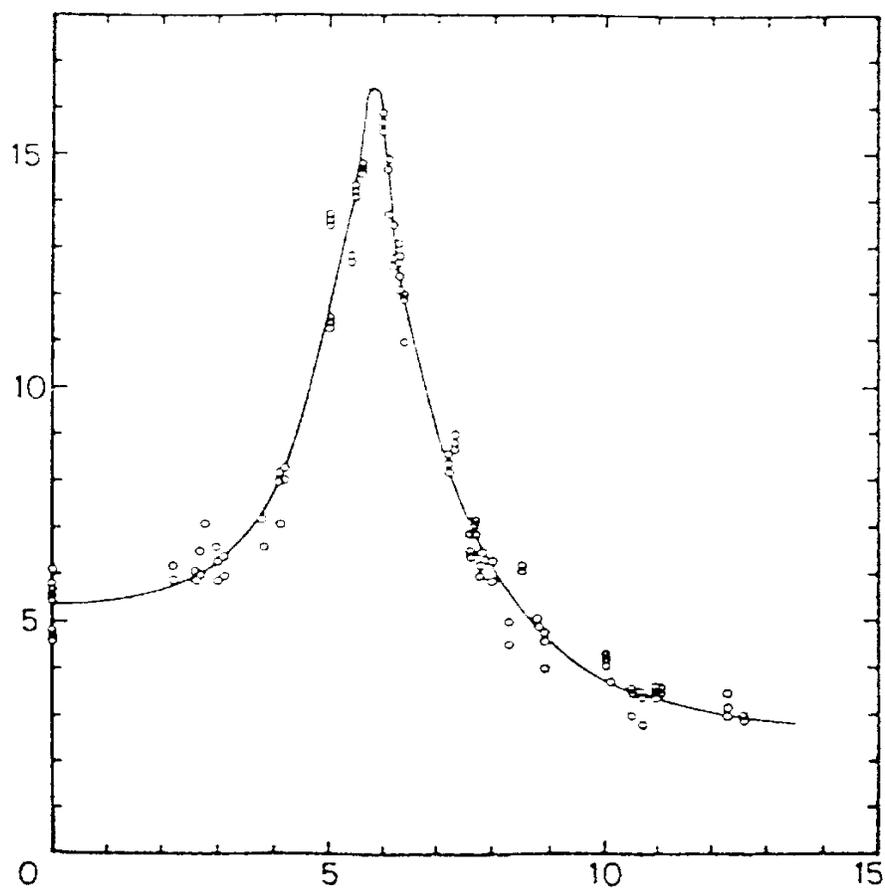


FIG. 1.2 – Reproduction de la figure 9 de Takizawa [27] qui montre la variation de la profondeur de la dépression (en mm sur l'axe vertical) en fonction de la vitesse (en m/s).



# Chapitre 2

## Formulation du problème

On considère un fluide bidimensionnel parfait de profondeur  $H$ , sous une couche de glace d'épaisseur uniforme  $h$ . Les expériences [20] ont montré que la couche de glace sous certaines conditions a un comportement élastique. Le modèle mathématique traditionnel utilisé dans l'analyse est donc celui d'une plaque élastique flottant sur la surface du fluide. Un schéma de l'écoulement est montré dans la Fig. 2.1.

On introduit des coordonnées cartésiennes avec l'axe  $x^*$  représentant l'interface entre le fluide et la glace au repos et l'axe  $y^*$  suivant la verticale. La déviation verticale de la couche de glace est notée par  $y^* = \zeta(x^*, t)$ .

Toutes les quantités physiques et les quantités adimensionnelles sont données dans les tableaux 2.1 et 2.2.

### 2.1 Equations dans le fluide

Le domaine occupé par le fluide est  $\{(x^*, y^*) \in \mathbb{R} \times (-H, \zeta(x^*, t))\}$ . Les composantes de la vitesse sont notées par  $u^*$  (horizontale) et  $v^*$  (verticale). L'équation de continuité peut être écrite sous la forme

$$\rho_t + \frac{\partial(\rho u^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial(\rho v^*)}{\partial y^*} = 0 \quad (2.1.1)$$

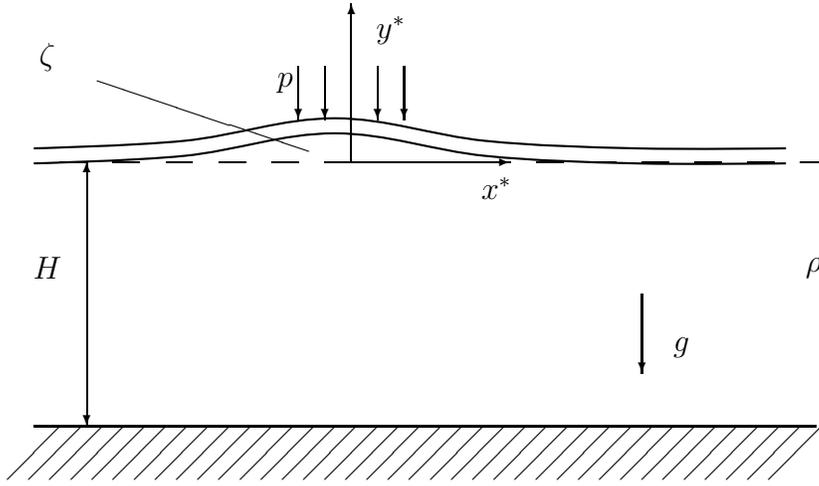


FIG. 2.1 – Schéma de l'écoulement

et, en supposant dans notre cas que le fluide est incompressible elle devient

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \text{ pour } \{(x^*, y^*) \in \mathbb{R} \times (-H, \zeta(x^*, t))\}. \quad (2.1.2)$$

On suppose de plus que l'écoulement est irrotationnel :

$$\frac{\partial u^*}{\partial y^*} - \frac{\partial v^*}{\partial x^*} = 0 \text{ pour } \{(x^*, y^*) \in \mathbb{R} \times (-H, \zeta(x^*, t))\}. \quad (2.1.3)$$

Il y a donc une fonction scalaire  $\phi^*$  que l'on appelle potentiel des vitesses et qui est telle que  $(u^*, v^*) = \nabla \phi^*$ .

La condition au fond est la condition d'imperméabilité

$$v^* = 0 \quad \text{en } y^* = -H. \quad (2.1.4)$$

A l'interface  $y^* = \zeta(x^*, t)$  nous avons la condition cinématique

$$\zeta_t + u^* \zeta_{x^*} - v^* = 0. \quad (2.1.5)$$

L'équation de Bernoulli dans le fluide peut être écrite sous la forme [25], [9]

$$\phi_t^* + \frac{1}{2}(u^{*2} + v^{*2}) + gy^* + \frac{P_0}{\rho} = f(t) \quad (2.1.6)$$

où  $P_0$  est la pression dans le fluide et  $f(t)$  est une fonction arbitraire du temps qui peut être éliminée en redéfinissant le potentiel. A l'interface cette équation devient

$$\phi_t^* + \frac{1}{2}(u^{*2} + v^{*2}) + g\zeta^* + \frac{p_0 - \rho_i g h}{\rho} = 0 \quad (2.1.7)$$

où  $p_0$  est la pression à l'interface eau-glace. Pour éliminer la pression dans la condition dynamique à l'interface il faut utiliser quelques résultats de la théorie de l'élasticité.

En suivant [9],[11] on suppose que la couche de glace se comporte localement comme une plaque élastique de Kirchoff-Love, c'est-à-dire qu'il y a une surface neutre (au milieu de la plaque) sans déformation provoquée par compression ou étirement et, pendant la déformation, les lignes droites qui étaient perpendiculaires sur cette surface neutre restent toujours droites et perpendiculaires sur la surface neutre déformée. On suppose qu'il n'y a pas de tension initiale dans la couche de glace. La couche de glace vérifie la loi de Hooke. En tenant compte de ces hypothèses, après des calculs sur les tenseurs et en éliminant l'effet de l'inertie angulaire on trouve l'équation d'équilibre pour les forces dans la couche de glace (voir l'équation (3.15) dans [25] ou l'équation (2.2) dans [9]) :

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^{*2}} = \rho_i h \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + (\rho_i g h + p) - p_0 \quad (2.1.8)$$

où  $M$  est le moment de flexion et  $p = p(x^*, t)$  est la pression due à une charge sur la glace. Le moment  $M$  est relié au rayon de courbure  $R$  (voir Fig. 2.2) de la surface neutre par la relation (voir [9], (2.3))

$$M = -\frac{D}{R}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

où  $D$  représente la rigidité intrinsèque en flexion de la glace,  $E$  est le module de Young et  $\nu$  la constante de Poisson pour la glace.

On peut déterminer  $R$  en fonction de  $\zeta$  :

$$\frac{1}{R} = \frac{\zeta_{x^*x^*}}{(1 + \zeta_{x^*}^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{h}{2}\zeta_{x^*x^*}} \quad (2.1.9)$$

En écrivant l'équation (2.1.7) à l'interface et en utilisant l'équation (2.1.8) on obtient

$$\rho\phi_t^* + \frac{1}{2}\rho(u^{*2} + v^{*2}) + \rho g \zeta + D \partial_{x^*x^*}^2 \frac{\zeta_{x^*x^*}}{(1 + \zeta_{x^*}^2)^{3/2} - \frac{h}{2}\zeta_{x^*x^*}} + \rho_i h \zeta_{tt} = -p \quad (2.1.10)$$

en  $y^* = \zeta(x^*, t)$ . On néglige par la suite les termes qui font intervenir  $h$ ,  $\frac{h}{2}\zeta_{x^*x^*}$  et  $\rho_i h \zeta_{tt}$ . Une justification est que l'épaisseur de la couche de glace est beaucoup plus faible que la longueur d'onde du déplacement vertical de la surface. Le mouvement de l'eau pénètre jusqu'à une profondeur comparable à la longueur d'onde et l'inertie de la couche mince de

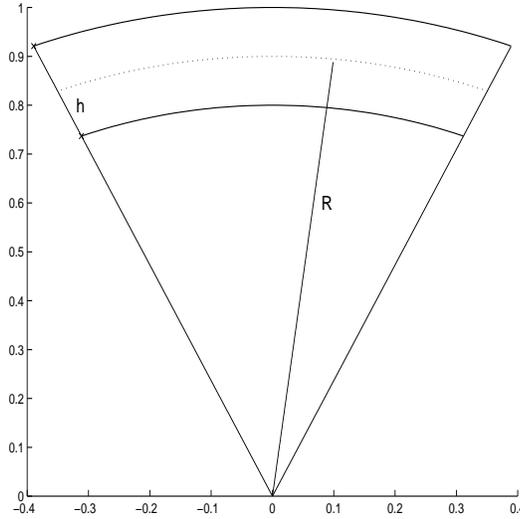


FIG. 2.2 – Le rayon de courbure  $R$  pour la plaque élastique d'épaisseur  $h$

glace va être petite par rapport à la couche de fluide en mouvement. L'équation précédente devient alors

$$\rho\phi_t^* + \frac{1}{2}\rho(u^{*2} + v^{*2}) + \rho g\zeta + D\partial_{x^*x^*}^2 \frac{\zeta_{x^*x^*}}{(1 + \zeta_{x^*}^2)^{3/2}} = -p \quad (2.1.11)$$

pour  $y^* = \zeta(x^*, t)$ . On rappelle que cette équation est valable dans l'hypothèse de l'absence de tension initiale sur la plaque élastique. La présence de tension aurait introduit un terme supplémentaire similaire au terme qui contient la tension superficielle dans le problème des ondes de capillarité-gravité. Le système d'équations à étudier est (2.1.2)-(2.1.5) et (2.1.11).

Le modèle de la couche de glace donné ci-dessus n'est pas, évidemment, le seul qui puisse être utilisé dans l'étude des ondes à la surface d'un fluide en présence d'une couche de glace. La modélisation de la glace est un sujet complexe et on fait référence à Squire et al. [25] pour la description d'autres modèles. Finissons ce chapitre en mentionnant un modèle récent décrit par Keller [15] où la glace est modélisé par un fluide visqueux.

symbole	quantité physique	dimension
$t$	le temps	$[T]$
$c$	la vitesse de l'onde	$[L][T]^{-1}$
$g$	l'accélération due à la gravité	$[L][T]^{-2}$
$H$	la profondeur moyenne de l'eau	$[L]$
$h$	l'épaisseur de la couche de glace	$[L]$
$D$	la rigidité intrinsèque en flexion de la glace	$[M][L]^2[T]^{-2}$
$E$	le module de Young	$[M][L]^{-1}[T]^{-2}$
$k$	le nombre d'onde	$[L]^{-1}$
$\rho$	la densité de l'eau	$[M][L]^{-3}$
$\rho_i$	la densité de la glace	$[M][L]^{-3}$
$P$	la pression due à la charge	$[M][T]^{-2}$
$L$	l'unité de longueur $(D/\rho c^2)^{1/3}$	$[L]$
$(x^*, y^*)$	les coordonnées physiques	$[L]$
$(u^*, v^*)$	les composantes de la vitesse	$[L][T]^{-1}$
$\psi^*(x^*, y^*)$	la fonction de courant	$[L]^2[T]^{-1}$
$\phi^*(x^*, y^*)$	le potentiel des vitesses	$[L]^2[T]^{-1}$
$\zeta(x^*, t)$	le profil de l'onde	$[L]$

TAB. 2.1 – Les paramètres physiques et leur dimensions

symbole	définition	quantité sans dimension
$\nu$		la constante de Poisson
$\kappa$	$kH$	le nombre d'onde adimensionnel
$f$	$gL/c^2$	l'inverse du nombre de Froude au carré basé sur $L$
$\lambda$	$gH/c^2$	l'inverse du nombre de Froude au carré basé sur $H$
$x$	$(x^* + ct)/L$	la coordonnée horizontale adimensionnelle se déplaçant avec le repère
$y$	$y^*/L$	la coordonnée verticale adimensionnelle
$(u, v)$	$(u^*, v^*)/c$	les composantes adimensionnelles de la vitesse
$\eta$	$\zeta/L$	le profil de l'onde adimensionnel
$(\phi, \psi)$	$(\phi^*, \psi^*)/cL$	le potentiel et la fonction de courant sans dimension
	$\phi + i\psi$	le potentiel complexe adimensionnel

TAB. 2.2 – Les quantités adimensionnelles



# Chapitre 3

## Le problème linéarisé

### 3.1 Le calcul formel de la déformation de la couche de glace

On suppose dans ce chapitre que la charge est appliquée sur la glace au moment  $t = 0$  et qu'elle se déplace avec une vitesse constante  $c$ . En fait, on s'intéresse au cas particulier où toute la charge est concentrée en un seul point. Avec ces hypothèses la pression  $p$  peut être écrite sous la forme  $p(x^*, t) = P\delta(x^* - ct)\mathcal{H}(t)$ , où  $P$  est une constante,  $\delta$  la fonction de Dirac et  $\mathcal{H}$  la fonction de Heaviside. Le problème sous la forme linéarisée a été beaucoup étudié et on va présenter ici quelques résultats en suivant la méthode utilisée dans [24].

On donne les conditions aux limites sous la forme linéarisée. La condition dynamique devient

$$\rho\phi_t^*|_{y^*=0} + \rho g\zeta + D\zeta_{x^*x^*x^*x^*} = -p, \quad (3.1.1)$$

et les conditions cinématiques

$$\phi_{y^*}^*|_{y^*=-H} = 0, \quad \phi_{y^*}^*|_{y^*=0} = \zeta_t. \quad (3.1.2)$$

On va chercher des solutions formelles pour ce système en utilisant la transformée de Fourier. On garde les notations classiques, c'est-à-dire avec  $\hat{f}$  pour la transformée de Fourier d'une fonction quelconque  $f$ . Puisque  $\phi$  satisfait aussi l'équation de Laplace  $\Delta\phi = 0$  on obtient facilement que  $\hat{\phi}$  doit vérifier le système  $-k^2\hat{\phi} + \hat{\phi}_{y^*y^*} = 0$  pour  $y^* \in (-H, 0)$  avec les conditions aux limites  $\hat{\phi}_{y^*}^*|_{y^*=-H} = 0$ ,  $\hat{\phi}_{y^*}^*|_{y^*=0} = \hat{\zeta}_t$ . La solution de ce système

vérifie  $\hat{\phi}|_{y^*=0} = \frac{1}{k} \coth(kH) \hat{\zeta}_t$ . L'équation de Bernoulli peut s'écrire [24]

$$(Dk^4 + \rho g) \hat{\zeta} + \hat{\zeta}_{tt} = -\frac{P}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikct}. \quad (3.1.3)$$

On impose les conditions initiales  $\hat{\zeta}|_{t=0} = 0$  et  $\hat{\zeta}_t|_{t=0} = 0$  et on trouve sans difficulté l'expression pour  $\hat{\zeta}$  :

$$\hat{\zeta}(k, t) = \frac{P}{\sqrt{2\pi} \rho c(k)} \left( \frac{e^{-ikct}(e^{-i\omega_1(k)t} - 1)}{2\omega_1(k)} + \frac{e^{-ikct}(e^{i\omega_2(k)t} - 1)}{2\omega_2(k)} \right) \tanh(kH) \quad (3.1.4)$$

où  $c(k)$  est donné par l'équation (0.0.1),  $\omega_1(k)$  et  $\omega_2(k)$  étant définis par :

$$\omega_1(k) = k[c(k) - c], \quad \omega_2(k) = k[c(k) + c].$$

En utilisant la transformée de Fourier inverse, on trouve l'expression pour la déformation verticale de l'interface (voir l'équation (2.9) dans [24])

$$\zeta(x^*, t) = \frac{P}{2\pi\rho} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\zeta}(k, t) e^{ikx^*} dk. \quad (3.1.5)$$

## 3.2 L'étude de la déformation

On introduit la coordonnée  $X = x^* - ct$  qui se déplace avec la charge et on écrit  $\zeta$  sous la forme suivante pour mieux mettre en évidence la partie stationnaire :

$$\zeta(X, t) = \frac{P}{2\pi\rho} (I_1 + I_2 - I_0), \quad (3.2.6)$$

avec les notations

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikX}}{\omega_1(k)\omega_2(k)} k \tanh(kH) dk, \quad I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(kX - \omega_1(k)t)}}{2c(k)\omega_1(k)} \tanh(kH) dk,$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(kX + \omega_2(k)t)}}{2c(k)\omega_2(k)} \tanh(kH) dk.$$

On rappelle que  $c(k)$  a un minimum que l'on note  $c_{\min}$  et on s'intéresse uniquement aux vitesses plus petites que  $c_{\min}$ .

On observe que  $\zeta_s = -\frac{P}{2\pi\rho} I_0$  représente la partie stationnaire de la solution et on peut

estimer les autres intégrales pour  $t$  grand en utilisant la méthode de la phase stationnaire. L'intégrale  $I_2$  ne pose pas de problèmes, son intégrande n'ayant pas de pôles réels parce que  $\omega_2$  est positive et strictement croissante. Pour  $t \rightarrow \infty$ ,  $I_2$  converge vers 0 (voir [24]). De plus, dans le cas  $c < c_{\min}$ ,  $\omega_1$  n'a pas de zéros réels et, en utilisant le lemme de Riemann-Lebesgue, on obtient aussi  $I_1 \rightarrow 0$  pour  $t \rightarrow \infty$ . On peut conclure que pour  $t \rightarrow \infty$ , la déformation de la couche de glace s'approche d'un état stationnaire pour  $c < c_{\min}$ .

On a calculé numériquement l'intégrale  $I_0$  pour des vitesses plus petites que  $c_{\min}$ , en utilisant une transformée de Fourier rapide. Dans la Figure 3.1 sont montrés quelques profils de la déformation stationnaire  $\zeta_s$  obtenus avec les paramètres physiques utilisés dans [26] et donnés dans la Tab. 1 pour des vitesses  $c < c_{\min} = 6.08$  m/s dans ce cas. Les profils sont symétriques,  $\zeta_s$  étant une fonction symétrique de  $X$ .

Les résultats linéaires sont en accord avec les expériences, au moins pour les trois vitesses  $c = 2.2; 4.2; 5.5$  m/s, si on compare les profils montrés dans la Figure 3.1 avec ceux dans la Figure 6 dans [27]. Les expériences ayant été faites avec des véhicules de forme rectangulaire, notre estimation pour  $P$ ,  $P = 320$  N/m, est approximative. On observe que l'amplitude de la déformation est maximale en  $X = 0$ . Si  $c$  augmente en se rapprochant de  $c_{\min}$ , l'amplitude  $|\zeta_s(0)|$  croît de façon monotone et devient infinie à la limite. Les oscillations deviennent de plus en plus nombreuses. Dans le voisinage de  $c_{\min}$ , l'amplitude étant trop grande, l'analyse linéaire n'est plus valable.

Une étude tridimensionnelle du problème linéaire est effectuée dans [19], en considérant une charge uniformément distribuée dans un rectangle, mais le même problème surgit pour  $c = c_{\min}$  : l'amplitude de la déformation devient infinie. Il est donc nécessaire d'étudier le problème nonlinéaire pour avoir une meilleure approximation de la solution dans le voisinage de la vitesse critique.

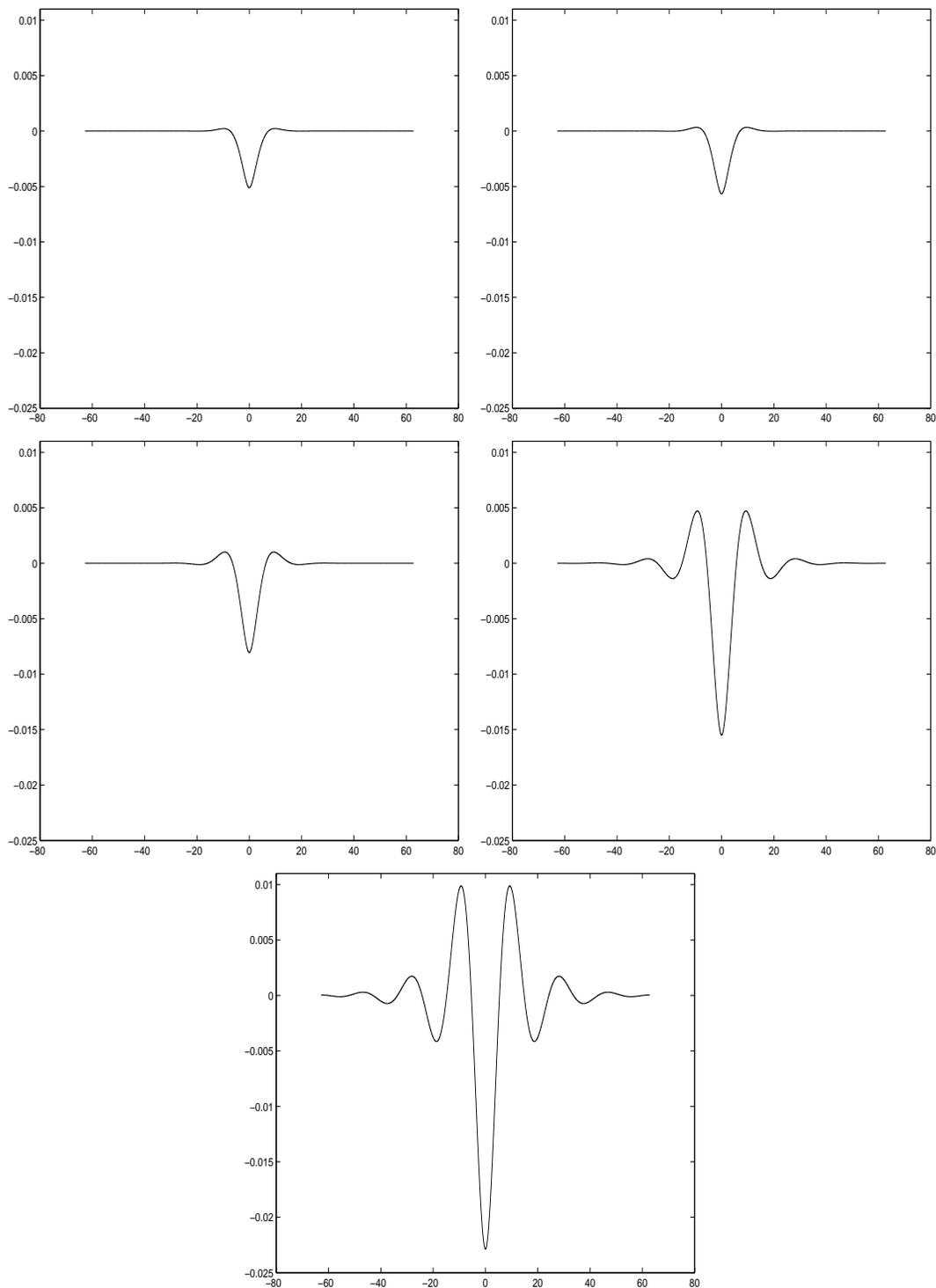


FIG. 3.1 – Le déplacement stationnaire de la couche de glace  $\zeta(x^* - ct)$  pour les paramètres physiques correspondant aux expériences de Takizawa (voir la Tab. 1). La valeur de  $P$  a été estimée à  $P = 320 \text{ N/m}^2$ . De haut en bas et de gauche à droite, les valeurs de la vitesse  $c$  sont 0; 2.2; 4.2; 5.5; 5.8. Les deux échelles sont en mètres.

# Chapitre 4

## Analyse du problème nonlinéaire

Dans ce chapitre on commence à étudier le problème nonlinéaire. Pour mieux comprendre l'effet de la nonlinéarité, on néglige la charge. Une analyse de type système dynamique est effectuée.

### 4.1 Formulation du problème sous la forme d'un système dynamique

Comme l'on étudie uniquement des ondes progressives qui se propagent suivant l'axe  $x$  avec une vitesse constante  $c$ , l'analyse est faite dans un repère en translation uniforme de la droite vers la gauche avec la vitesse  $c$  et des mouvements stationnaires dans ce repère sont considérés. Il faut noter que le problème défini dans le Ch. 2 est invariant par les transformations  $x^* \rightarrow x^* + ct$ ,  $\phi^* \rightarrow \phi^* - cx^* - \frac{1}{2}c^2t$ . Des variables sans dimension sont introduites en prenant  $c$  comme unité de vitesse et  $L = (D/\rho c^2)^{1/3}$  comme unité de longueur. Pour les expériences de Takizawa,  $L$  est de l'ordre de 1.8 m pour la vitesse critique  $c_{\min}$ . On choisit les paramètres sans dimension

$$\lambda = \frac{gH}{c^2} \quad \text{et} \quad f = \frac{g}{c^2} \sqrt[3]{\frac{D}{\rho c^2}}.$$

On rappelle qu'une nomenclature de toutes les quantités physiques et sans dimension est fourni dans les tables 2.1 et 2.2.

Le problème se met sous la forme adimensionnelle

$$u_x + v_y = 0, \quad u_y - v_x = 0 \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times \left(-\frac{\lambda}{f}, \eta(x)\right), \quad (4.1.1)$$

$$v = 0 \quad \text{pour } y = -\frac{\lambda}{f}, \quad (4.1.2)$$

$$u\eta_x - v = 0 \quad \text{pour } y = \eta(x), \quad (4.1.3)$$

$$\frac{1}{2}(u^2 + v^2 - 1) + f\eta + \partial_{xx}^2 \frac{\eta_{xx}}{(1 + \eta_x^2)^{3/2}} = 0 \quad \text{pour } y = \eta(x). \quad (4.1.4)$$

La formulation est pratiquement la même que pour les ondes de capillarité-gravité [4], à l'exception du terme de flexion qui remplace le terme de tension superficielle.

La fonction de courant  $\psi$  définie par  $(u, v) = (\psi_y, -\psi_x)$  est introduite et fixée à zéro sur l'interface. Il s'en suit que  $\psi(x, -\lambda/f) = -\lambda/f$ . Le problème est reformulé en prenant  $x$  et  $\psi$  comme variables indépendantes. Le domaine  $\mathbb{R} \times \left(-\frac{\lambda}{f}, \eta(x)\right)$  devient  $\mathbb{R} \times \left(-\frac{\lambda}{f}, 0\right)$ . Les composantes de la vitesse sont remplacées par les nouvelles variables

$$w_1 = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 - 1), \quad w_2 = \frac{v}{u} \quad (4.1.5)$$

pour simplifier la condition dynamique à l'interface. Les équations (4.1.5) peuvent être inversées pour obtenir

$$u = \left(\frac{1 + 2w_1}{1 + w_2^2}\right)^{1/2}, \quad v = w_2 \left(\frac{1 + 2w_1}{1 + w_2^2}\right)^{1/2}. \quad (4.1.6)$$

Dans le domaine  $\mathbb{R} \times \left(-\frac{\lambda}{f}, 0\right)$ , les équations (4.1.1) s'écrivent

$$\partial_x \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} w_2 \cdot u & -u^3 \\ \frac{1}{u} & w_2 \cdot u \end{bmatrix} \partial_\psi \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \quad (4.1.7)$$

La condition au fond devient  $w_2(\cdot, -\lambda/f) = 0$  et la condition cinématique à l'interface  $\eta_x - w_2(\cdot, 0) = 0$ . Le profil  $\eta(x)$  de l'interface eau-glace peut être écrit en fonction de  $w_1$  et  $w_2$ , en divisant l'équation de continuité par  $u^2$  et en intégrant par rapport à  $\psi$  de  $-\frac{\lambda}{f}$  à 0 :

$$\eta = \int_{-\frac{\lambda}{f}}^0 \frac{1}{u} d\psi - \frac{\lambda}{f}.$$

On note  $[\cdot]$  la valeur moyenne de  $\cdot$  sur l'intervalle  $[-\frac{\lambda}{f}, 0]$  et  $w_2(\cdot, 0) = \eta_x = \alpha$ ,  $\alpha_x = \beta$  and  $\beta_x = \gamma$ . Avec ces notations le système (4.1.1)–(4.1.4) s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \\ (1 + \alpha^2)^{3/2}(-w_1(\cdot, 0) - \lambda[\frac{1}{u}] + \lambda) + \frac{3\beta^3 + 9\alpha\beta\gamma}{1 + \alpha^2} - \frac{15\alpha^2\beta^3}{(1 + \alpha^2)^2} \\ w_2 u w_{1\psi} - u^3 w_{2\psi} \\ \frac{1}{u} w_{1\psi} + w_2 u w_{2\psi} \end{pmatrix} \quad (4.1.8)$$

avec les conditions aux limites  $w_2(\cdot, 0) = \alpha$  et  $w_2(\cdot, -\lambda/f) = 0$ .

Il est facile de vérifier que la partie droite de ce système anticommute avec

$$R = \text{diag}(-1, 1, -1, 1, -1) :$$

si  $(\alpha(x), \beta(x), \gamma(x), w_1(x, \psi), w_2(x, \psi))$  est solution, alors  $(-\alpha(-x), \beta(-x), -\gamma(-x), w_1(-x, \psi), -w_2(-x, \psi))$  est aussi solution. Le profil de l'interface  $\eta$  peut être développé en

$$\eta = \frac{\lambda}{f}(-[w_1] + \dots). \quad (4.1.9)$$

On définit  $\mathbf{w} = (\alpha, \beta, \gamma, w_1, w_2)^T$  et on le considère comme une fonction  $\mathbb{R} \ni x \rightarrow X$ , où  $X = \mathbb{R}^3 \times L^2(-\frac{\lambda}{f}, 0) \times L^2(-\frac{\lambda}{f}, 0)$ . En suivant [11], on cherche des solutions  $\mathbf{w} \in C_b^0(\mathbb{R}, D(L)) \cap C_b^k(\mathbb{R}, X)$  avec  $k > 1$  (un nombre entier fixé) pour le système (4.1.8) mis sous la forme

$$\mathbf{w}_x = L\mathbf{w} + N(\mathbf{w}), \quad (4.1.10)$$

où  $L$  est la linéarisation de la partie droite du système en  $\mathbf{w} = 0$  et  $N(\mathbf{w})$  est la partie nonlinéaire du système. L'opérateur  $L$  est donné par

$$L\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \\ -w_1(0) + \lambda[w_1] \\ -w_{2\psi} \\ w_{1\psi} \end{pmatrix}.$$

$D(L)$  est défini comme

$$D(L) = \mathbb{R}^3 \times H^1(-\frac{\lambda}{f}, 0) \times H^1(-\frac{\lambda}{f}, 0) \cap \{w_2(-\frac{\lambda}{f}) = 0, w_2(0) = \alpha\}$$

L'indice 'b' indique qu'on cherche des solutions bornées, c'est-à-dire

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \{ \|\partial_x w(x)\|_X + \|w(x)\|_L \} < \infty, \quad \|\mathbf{w}\|_L = \|\mathbf{w}\|_X + \|L\mathbf{w}\|_X$$

où la norme  $\|\mathbf{w}\|_X$  est égale à  $\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_X^{1/2}$ . Le produit scalaire est défini par

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle_X = \alpha \bar{a} + \beta \bar{b} + \gamma \bar{g} + \int_{-\frac{\lambda}{f}}^0 (w_1 \bar{v}_1 + w_2 \bar{v}_2) d\psi \quad (4.1.11)$$

pour  $\mathbf{w} = (\alpha, \beta, \gamma, w_1, w_2)^T$ ,  $\mathbf{v} = (a, b, g, v_1, v_2)^T \in X$ . Parce que  $L$  est fermé dans  $X$ , la norme du graphe  $\|\cdot\|_L$  définit un espace de Hilbert  $(D(L), \|\cdot\|_L)$  (voir [11]).

La nonlinéarité peut être mise sous la forme

$$N(\mathbf{w}) = N_2(\mathbf{w}, \mathbf{w}) + N_3(\mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{w}) + \dots$$

avec les points désignant les termes d'ordre supérieur et

$$N_2(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\lambda}{2}(3[w_1^2] + [w_2^2]) \\ w_2 w_{1\psi} - 3w_1 w_{2\psi} \\ -w_1 w_{1\psi} + w_2 w_{2\psi} \end{pmatrix},$$

$$N_3(\mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{3}{2}\alpha^2(w_1(0) - \lambda[w_1]) + \frac{\lambda}{2}(5[w_1^3] + [w_1 w_2^2]) + 3\beta^3 + 9\alpha\beta\gamma \\ w_1 w_2 w_{1\psi} - \frac{3}{2}w_{2\psi}(w_1^2 - w_2^2) \\ \frac{1}{2}(3w_1^2 + w_2^2)w_{1\psi} + w_2 w_1 w_{2\psi} \end{pmatrix}.$$

## 4.2 Etude du spectre

L'opérateur linéaire  $L$  est fermé dans  $X$  avec le domaine dense  $D(L)$ . En utilisant le fait que l'inclusion  $D(L) \subset X$  est compacte, on peut dire que l'opérateur  $L$  a une résolvante compacte, donc le spectre  $\Sigma L$  contient uniquement des valeurs propres isolées avec des multiplicité finies. De plus, la réversibilité de  $L$  nous assure que si  $\sigma$  est une valeur propre,  $-\sigma, \bar{\sigma}, -\bar{\sigma}$  sont aussi des valeurs propres. Il est facile de montrer que  $\sigma \in \mathbb{C}$  est une valeur propre si elle vérifie l'équation

$$(\sigma^4 + f) \sin\left(\frac{\lambda}{f}\sigma\right) = \sigma \cos\left(\frac{\lambda}{f}\sigma\right). \quad (4.2.12)$$

Dans l'espace des paramètres  $(f, \lambda)$ , l'ensemble des points où des ondes peuvent bifurquer de la solution triviale peut être déterminé en exigeant que la partie centrale du spectre de

$L$ ,  $\Sigma L \cap i\mathbb{R}$  contienne au moins une valeur propre de multiplicité deux (voir [13]). Donc il faut chercher les valeurs propres doubles purement imaginaires.

On observe tout de suite que  $\sigma = 0$  est une valeur propre double si et seulement si  $\lambda = 1$ .

Les bifurcations dans ce cas ont été étudiées dans [11].

Si on pose  $\sigma = \pm i\frac{f}{\lambda}\kappa$ , avec  $k \in \mathbb{R}_+^*$  alors la relation (4.2.12) pour  $\kappa$  s'écrit

$$D(\kappa; \lambda, f) \equiv \left[ \kappa^4 \left( \frac{f}{\lambda} \right)^3 + \lambda \right] \tanh \kappa - \kappa = 0. \quad (4.2.13)$$

On peut montrer facilement qu'il y a zéro, une ou deux racines positives  $\kappa$  pour cette équation. Donc on peut avoir au plus une valeur propre double  $i\frac{f}{\lambda}\kappa$  avec  $k \in \mathbb{R}_+^*$  sur l'axe imaginaire pour l'opérateur  $L$ . Pour avoir la racine double il faut aussi vérifier la relation

$$\frac{\partial D}{\partial \kappa} = 4\kappa^3 \left( \frac{f}{\lambda} \right)^3 \tanh \kappa + \left[ \kappa^4 \left( \frac{f}{\lambda} \right)^3 + \lambda \right] (1 - \tanh^2 \kappa) - 1 = 0. \quad (4.2.14)$$

Ces valeurs propres doubles imaginaires non-nulles  $\sigma = \pm i\frac{f}{\lambda}\kappa$  correspondent au minimum de la courbe de dispersion (0.0.1) et déterminent une courbe  $\Gamma$  dans l'espace des paramètres  $(f, \lambda)$ .

La forme paramétrique de  $\Gamma$  est donnée par

$$\begin{aligned} f &= \frac{3 \tanh \kappa + \kappa - \kappa \tanh^2 \kappa}{4 \tanh^2 \kappa} \sqrt[3]{\frac{\tanh \kappa - \kappa + \kappa \tanh^2 \kappa}{4 \tanh^2 \kappa}}, \\ \lambda &= \frac{\kappa(3 \tanh \kappa + \kappa - \kappa \tanh^2 \kappa)}{4 \tanh^2 \kappa}, \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

pour  $\kappa \in (0, \infty)$ . Les comportements asymptotiques de  $f$  et  $\lambda$  sont

$$f \sim \frac{1}{\sqrt[3]{6} \kappa^{2/3}} + O(\kappa^{4/3}), \quad \lambda \sim 1 + \frac{1}{6}\kappa^2 + O(\kappa^4), \quad \text{pour } \kappa \rightarrow 0$$

et

$$f \sim \frac{3}{4\sqrt[3]{4}} + 2^{1/3}e^{-2\kappa}, \quad \lambda \sim \frac{3}{4}\kappa, \quad \text{pour } \kappa \rightarrow \infty.$$

En profondeur infinie  $f \approx 0.4725$ . Dans les expériences de Takizawa,  $\kappa = kH = 2.27$ . La courbe  $\Gamma$  est montrée dans la Figure 4.1.

Une courbe similaire existe pour les ondes de capillarité-gravité [4]. La différence est que pour le problème des ondes de flexion-gravité à l'interface eau-glace il n'y a pas de valeurs des paramètres  $f$  et  $\lambda$  où les valeurs propres imaginaires doubles conjuguées fusionnent à

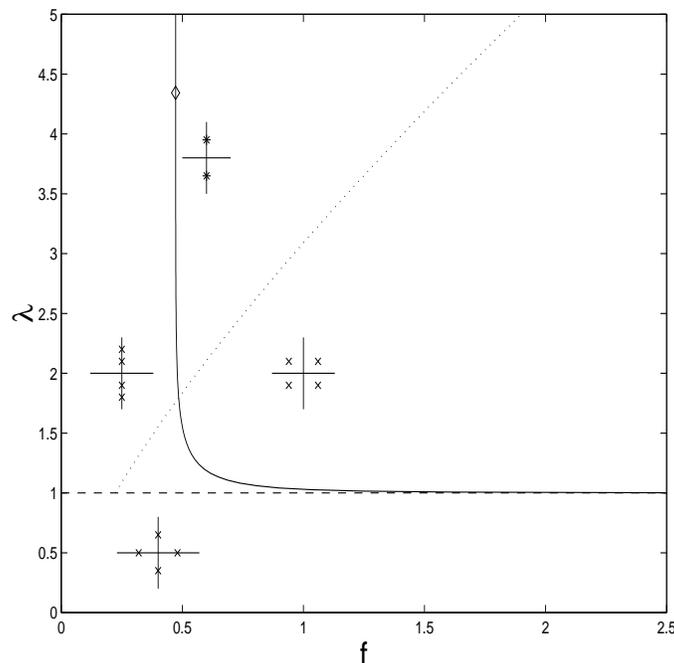


FIG. 4.1 – Les valeurs de  $f$  et  $\lambda$  correspondant au minimum de la courbe de dispersion (trait plein). Le trait en tirets  $\lambda = 1$  correspond à la vitesse des ondes longues  $\sqrt{gH}$ . Le changement dans le comportement des valeurs propres proches de l’axe imaginaire est aussi montré. Le trait en pointillés représente les valeurs dans les expériences de Takizawa. Il est donné par  $\lambda = (\rho g H^4 / D)^{1/4} f^{3/4}$ , i.e.  $\lambda \approx 3.09 f^{3/4}$ . Le losange représente le lieu où le coefficient  $q_2$  donné par (4.4.31) s’annule.

l’origine. Pour les ondes de capillarité-gravité, cette fusion se produit pour un nombre de Bond égal à  $1/3$ .

Ensuite on poursuit l’étude au voisinage de cette courbe  $\Gamma$ . On est dans le cas de la résonance 1 :1. Un petit paramètre  $\mu = \frac{f^*}{\lambda^*}(\lambda - \lambda^*)$  est défini, comme dans [4], où le point  $(f^*, \lambda^*)$  appartient à la courbe  $\Gamma$ . Dans ce chapitre on élimine les étoiles quand il n’y a pas de risque de confusion. On introduit aussi la notation  $K = \kappa f / \lambda$ .

### 4.3 Réduction à la variété centrale

En utilisant le théorème de la réduction à la variété centrale démontré par Mielke dans [18] on va réduire le système (4.1.10) à un système d’équations différentielles dans un espace

de dimension finie, pour les solutions petites et bornées.

Les vecteurs propres  $\varphi_0^+$  (resp.  $\varphi_0^-$ ) et les vecteurs propres généralisés  $\varphi_1^+$  (resp.  $\varphi_1^-$ ) qui correspondent à la valeur propre  $+iK$  (resp.  $-iK$ ) satisfont

$$\begin{aligned} L\varphi_0^+ &= iK\varphi_0^+, & L\varphi_1^+ &= iK\varphi_1^+ + \varphi_0^+, \\ L\varphi_0^- &= -iK\varphi_0^-, & L\varphi_1^- &= -iK\varphi_1^- + \varphi_0^-. \end{aligned}$$

Après des calculs on obtient

$$\varphi_0^+ = \frac{1}{\cosh \kappa} \begin{pmatrix} i \sinh \kappa \\ -K \sinh \kappa \\ -iK^2 \sinh \kappa \\ -\cosh(K\psi + \kappa) \\ i \sinh(K\psi + \kappa) \end{pmatrix}, \quad (4.3.16)$$

$$\varphi_1^+ = \frac{1}{\cosh \kappa} \begin{pmatrix} 0 \\ i \sinh \kappa \\ -2K \sinh \kappa \\ i[\psi \sinh(K\psi + \kappa) - \frac{\lambda}{f} \cosh(K\psi) / \sinh \kappa] \\ \psi \cosh(K\psi + \kappa) - \frac{\lambda}{f} \sinh(K\psi) / \sinh \kappa \end{pmatrix}, \quad (4.3.17)$$

et  $\varphi_0^- = \overline{\varphi_0^+}$ ,  $\varphi_1^- = \overline{\varphi_1^+}$ . Evidemment, les vecteurs  $\varphi_0^+$  et  $\varphi_1^+$  ne sont pas uniques, chaque multiple de  $\varphi_0^+$  étant aussi un vecteur propre et chaque vecteur  $\varphi_1^+ + C\varphi_0^+$  étant un vecteur propre généralisé. On observe que  $R\varphi_0^+ = \varphi_0^-$ ,  $R\varphi_1^+ = -\varphi_1^-$ .

On montre maintenant que les hypothèses du théorème de la variété centrale sont satisfaites et on passe en revue l'approche décrite dans [13] ou [16]. On observe que la non-linéarité  $N$  est une fonction régulière définie  $:D(L) \rightarrow Y \subset X$  où  $Y$  est le sous-espace fermé  $Y = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R} \times L^2(-\frac{\lambda}{f}, 0) \times L^2(-\frac{\lambda}{f}, 0)$ . Si on note  $\hat{N}(\mu, \mathbf{w}) = (L(\lambda, f) - L(\lambda^*, f^*))\mathbf{w} + N$ , où  $L(\lambda^*, f^*)$  désigne l'opérateur  $L$  avec les paramètres  $(\lambda, f) = (\lambda^*, f^*)$ , on a l'estimation

$$\|\hat{N}(\mu, \mathbf{w})\|_X \leq c_1\mu\|\mathbf{w}\|_L + c_2\|\mathbf{w}\|_L^2$$

pour  $\mu$  et  $\mathbf{w}$  suffisamment proches de zéro (voir [11]). On garde ensuite la notation  $L$  pour  $L(\lambda^*, f^*)$  et  $N(\mu, w)$  pour  $\hat{N}(\mu, \mathbf{w})$ . Soit  $X_0$  l'espace généré par les vecteurs propres et les vecteurs propres généralisés (dans notre cas  $\varphi_0^\pm, \varphi_1^\pm$ ). On décompose  $X = X_0 \oplus X_1$  et  $\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 + \mathbf{w}_1$ ,  $\mathbf{w}_i \in X_i \cap D(L)$ ,  $L_0 = L|_{X_0}$ ,  $L_1 = L|_{X_1 \cap D(L)}$  et similaire pour  $N_0, N_1$ . L'équation (4.1.10) s'écrit

$$\begin{aligned} \partial_x \mathbf{w}_0 &= L_0 \mathbf{w}_0 + N_0(\mu, \mathbf{w}_0 + \mathbf{w}_1) \\ \partial_x \mathbf{w}_1 &= L_1 \mathbf{w}_1 + N_1(\mu, \mathbf{w}_0 + \mathbf{w}_1). \end{aligned} \quad (4.3.18)$$

Il existe des voisinages de 0 :  $U'_0 \subset X_0$ ,  $U'_2 \subset D(L) \cap X_1$  et  $\Lambda$  de 0 tels que

$$N = (N_0, N_1) \in C_b^k(\Lambda \times U'_0 \times U'_2, X_0 \times V) \quad (4.3.19)$$

$$N(0, 0) = 0, \quad \partial_{\mathbf{w}} N(0, 0) = 0 \quad (4.3.20)$$

où  $V \subset X_1$  sous-espace fermé. On montre dans l'Annexe A le lemme suivant (voir [11]) :

**Lemme.** Etant donné  $L$ , on considère la complexification  $\hat{L}$  dans  $\hat{X} = X + iX$ ,  $\hat{Y} = Y + iY$ . Pour chaque  $(\lambda, f) \in \mathbb{R}_+^{*2}$  il existe une constante  $k_0 > 0$  telle que tout  $z = ik$ ,  $k \in \mathbb{R}$ ,  $|k| \geq k_0$  appartient à l'ensemble résolvant de  $\hat{L}$ . De plus, on a les inégalités suivantes pour un  $C > 0$ , indépendant de  $k$

$$\begin{aligned} (i) & \|(\hat{L} - ik)^{-1}\|_{\hat{X} \rightarrow \hat{X}} \leq C; \\ (ii) & \|(\hat{L} - ik)^{-1}\|_{\hat{Y} \rightarrow \hat{X}} \leq \frac{C}{k}; \\ (iii) & \|(\hat{L} - ik)^{-2}\|_{\hat{Y} \rightarrow \hat{X}} \leq \frac{C}{k^2}. \end{aligned}$$

Toutes ces propriétés nous montrent que les hypothèses du théorème de la variété centrale (voir Mielke [18]) sont satisfaites. Donc

**Théorème.** Il existe des voisinages de zéro  $U_0 \subset U'_0 \subset X_0$ ,  $U_2 \subset U'_2 \subset X_1 \cap D(L)$ , un voisinage  $\Lambda_0 \subset \Lambda$  de  $\mu = 0$  et une fonction

$$h = h(\mu, \mathbf{w}_0) \in C_b^{k-1}(\Lambda_0 \times U_0, U_2)$$

avec les propriétés suivantes

(i) L'ensemble

$$M_\mu = \{(\mathbf{w}_0, h(\mu, \mathbf{w}_0)) \in X_0 \times (X_1 \cap D(L)) \mid \mathbf{w}_0 \in U_0\}$$

est une variété locale intégrable de (4.3.18) avec  $\mu \in \Lambda_0$ .

(ii) Chaque solution de (4.3.18) avec  $\mu \in \Lambda_0$ ,  $(\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1) \in U_0 \times U_2$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$  appartient à  $M_\mu$ .

(iii) On a  $h(0, 0) = \partial_{\mathbf{w}_0} h(0, 0) = 0$ .

(iv) Si  $R_i : X_i \rightarrow X_i$ ,  $i = 0, 1$  sont des isométries linéaires telles que  $N_i(\mu, R_0 \mathbf{w}_0, R_1 \mathbf{w}_2) = -R_i N_i(\mu, \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1)$ ,  $L_i R_i = -R_i L_i$  alors  $h(\mu, R_0 \mathbf{w}_0) = R_1 h(\mu, \mathbf{w}_0)$ .

En appliquant ce théorème, les solutions de (4.3.18) qui restent dans  $U_0 \times U_2$  pour  $x \in \mathbb{R}$  satisfont, pour chaque  $\mu \in \Lambda_0$ , l'équation

$$\partial_x \mathbf{w}_0 = L_0 \mathbf{w}_0 + f_0(\mu, \mathbf{w}_0) \quad (4.3.21)$$

où  $f_0(\mu, \mathbf{w}_0) = N_0(\mu, \mathbf{w}_0 + h(\mu, \mathbf{w}_0))$ .

## 4.4 Forme normale

Une méthode puissante pour trouver  $w_0$  est la théorie de la forme normale [12]. Cette méthode s'applique de la manière suivante (voir [13]) : On identifie l'espace  $X_0$  avec  $\mathbb{C}^m$ , où  $m$  est la dimension de la partie centrale du spectre de  $L$ ,  $\Sigma L \cap i\mathbb{R}$ .  $L_0$  est une matrice  $m \times m$ , et  $f_0$  un champ de vecteurs  $m$ -dimensionnel. Pour  $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$  il existe une transformation polynomiale  $\mathbf{w}_0 = \underline{W} + F(\mu, \underline{W})$  dans  $\mathbb{C}^m$  telle que (4.3.21) se transforme en

$$\partial_x \underline{W} = L_0 \underline{W} + \Psi(\mu, \underline{W}) + O(|\underline{W}|)^{k+1} \quad (4.4.22)$$

pour  $\mu$  proche de 0,  $\Psi$  étant un polynôme de degré  $k$  qui satisfait

$$L_0^* \Psi(\mu, \underline{W}) = D_{\underline{W}} \Psi(\mu, \underline{W}) L_0^* \underline{W}$$

où  $L_0^*$  est la matrice adjointe de  $L_0$ .

Dans notre cas, toutes les solutions qui restent bornées et petites peuvent être écrites

$$\mathbf{w} = A(x)\varphi_0^+ + B(x)\varphi_1^+ + \bar{A}(x)\varphi_0^- + \bar{B}(x)\varphi_1^- + \Phi(\mu; A, B, \bar{A}, \bar{B}), \quad (4.4.23)$$

où  $\Phi(0; A, B, \bar{A}, \bar{B}) = (A^2\Phi_{2000} + c.c.) + |A|^2\Phi_{1100} + \dots$  est une fonction nonlinéaire contenant les termes d'ordre supérieur en  $A, B, \bar{A}, \bar{B}$ . L'étape suivante est de trouver  $A$  et  $B$  jusqu'à un certain ordre. Si on connaît  $A$  et  $B$ , on trouve  $\mathbf{w}$  donné par (4.4.23) et, après, on peut déterminer le profil  $\eta$  en utilisant (4.1.9).

Le système réduit des équations différentielles ordinaires pour les amplitudes  $A$  et  $B$  est

$$\begin{cases} A_x = iKA + B + f(\mu, A, B, \bar{A}, \bar{B}) \\ B_x = iKB + g(\mu, A, B, \bar{A}, \bar{B}) \end{cases} \quad (4.4.24)$$

où  $f$  et  $g$  contiennent les termes d'ordre supérieur. Pour notre problème de résonance 1 : 1 avec réversibilité, il est montré en détail dans [12] que le système réduit des équations peut être mis sous la forme normale suivante

$$A_x = iKA + B + iAP(\mu; |A|^2, \frac{1}{2}i(A\bar{B} - \bar{A}B)) \quad (4.4.25)$$

$$B_x = iKB + iBP(\mu; |A|^2, \frac{1}{2}i(A\bar{B} - \bar{A}B)) + AQ(\mu; |A|^2, \frac{1}{2}i(A\bar{B} - \bar{A}B)) \quad (4.4.26)$$

où

$$P(\mu; |A|^2, \frac{1}{2}i(A\bar{B} - \bar{A}B)) = p_1\mu + p_2|A|^2 + p_3\frac{1}{2}i(A\bar{B} - \bar{A}B) + \dots$$

$$Q(\mu; |A|^2, \frac{1}{2}i(A\bar{B} - \bar{A}B)) = q_1\mu - q_2|A|^2 + q_3\frac{1}{2}i(A\bar{B} - \bar{A}B) + \dots$$

On calcule ensuite les coefficients de la forme normale, en suivant la méthode décrite dans [4].

#### 4.4.1 Calcul de coefficients

Le coefficient  $q_1$  est facile à calculer. Il est relié aux valeurs propres de la linéarisation de (4.4.25)-(4.4.26) en  $(0,0)$

$$\sigma = iK + iP(\mu, 0, 0) \pm \sqrt{Q(\mu, 0, 0)}$$

ou

$$\sigma = i(K + p_1\mu) \pm \sqrt{q_1\mu} + O(|\mu|^{3/2})$$

On introduit cette expression dans (4.2.12) avec  $f \approx f^* + \mu$  et on développe en puissances de  $\mu$ . On obtient

$$q_1 = 2^{1/3} \frac{(\sinh \kappa \cosh \kappa - \kappa)^{1/3} \sinh^{7/3} \kappa}{3 \cosh \kappa \sinh^2 \kappa - 2\kappa^2 \cosh \kappa - \kappa \sinh \kappa}, \quad (4.4.27)$$

Le coefficient  $q_1$  est positif pour tout  $\kappa > 0$  et monotone décroissant comme fonction de  $\kappa$ . Le comportement asymptotique de  $q_1$  est donné par

$$q_1 \sim \frac{1}{4} \frac{6^{2/3}}{\kappa^{2/3}} \text{ pour } \kappa \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad q_1 \rightarrow \frac{2^{1/3}}{3} \approx 0.42 \text{ pour } \kappa \rightarrow \infty.$$

Pour calculer le coefficient  $q_2$  on a besoin de déterminer l'opérateur adjoint  $L^*$  de  $L$ , qui satisfait

$$\langle L\mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{w}, L^*\mathbf{v} \rangle, \quad \mathbf{w} \in D(L), \quad \mathbf{v} = (a, b, g, v_1, v_2)^T \in D(L^*),$$

avec le produit scalaire donné par (4.1.11). Le domaine du  $L^*$  est

$$D(L^*) = \mathbb{R}^3 \times H^1\left(-\frac{\lambda}{f}, 0\right) \times H^1\left(-\frac{\lambda}{f}, 0\right) \cap \{v_2\left(-\frac{\lambda}{f}\right) = 0, v_2(0) = g\}$$

L'opérateur  $L^*$  appliqué à  $\mathbf{v}$  s'écrit

$$L^*\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -v_1(0) \\ a \\ b \\ f v_2(0) - v_{2\psi} \\ v_{1\psi} \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres et les vecteurs propres généralisés pour l'opérateur adjoint  $L^*$  satisfont

$$L^*\psi_+^1 = -iK\psi_+^1, \quad L^*\psi_+^0 = -iK\psi_+^0 + \psi_+^1$$

et peuvent être choisis tels que

$$\langle \varphi_0^+, \psi_+^1 \rangle = 0, \quad \langle \varphi_0^+, \psi_+^0 \rangle = 1, \quad \langle \varphi_1^+, \psi_+^1 \rangle = 1, \quad \langle \varphi_1^+, \psi_+^0 \rangle = 0.$$

On trouve après des calculs

$$\psi_+^1 = \mathcal{C}_0 \begin{pmatrix} K^2 \sinh \kappa \\ iK \sinh \kappa \\ -\sinh \kappa \\ i \left[ \cosh(K\psi + \kappa) - \frac{\lambda}{\kappa} \sinh \kappa \right] \\ -\sinh(K\psi + \kappa) \end{pmatrix},$$

et

$$\psi_+^0 = \mathcal{C}_0 \begin{pmatrix} 2iK \sinh \kappa \\ -\sinh \kappa \\ 0 \\ -\psi \sinh(K\psi + \kappa) + \frac{\lambda}{f} \frac{\cosh K}{\sinh \kappa} - \frac{f}{K} \sinh \kappa \\ -i(\psi \cosh(K + k) - \frac{\lambda}{f} \frac{\sinh K}{\sinh \kappa}) \end{pmatrix} + i\mathcal{C}_1 \psi_+^1$$

où

$$\mathcal{C}_0 = \left(\frac{f}{\lambda}\right)^2 \frac{2\kappa^2 \sinh \kappa \cosh \kappa}{3 \sinh^2 \kappa \cosh \kappa - \kappa \sinh \kappa - 2\kappa^2 \cosh \kappa}. \quad (4.4.28)$$

et

$$\mathcal{C}_1 = \frac{\mathcal{C}_0}{3} \frac{8\kappa^4 \cosh^2 \kappa - 3\kappa^2 \sinh^2 \kappa - 3\kappa \sinh^2 \kappa (1 + 3 \sinh \kappa \cosh \kappa) + 3 \sinh^3 \kappa \cosh \kappa}{k \cosh \kappa (\kappa - \sinh \kappa \cosh \kappa)}$$

Dans le calcul de  $q_2$  n'intervient que  $\psi_+^1$ . Dans les expériences de Takizawa  $\mathcal{C}_0 \approx 0.0604$ .

Le coefficient  $q_2$  est donné par (voir [4])

$$q_2 = -\langle 2N_2(\varphi_0^+, \Phi_{1100}) + 2N_2(\varphi_0^-, \Phi_{2000}) + 3N_3(\varphi_0^+, \varphi_0^+, \varphi_0^-), \psi_+^1 \rangle. \quad (4.4.29)$$

Les vecteurs  $\Phi_{2000}$  et  $\Phi_{1100}$  satisfont les équations

$$\begin{aligned} L\Phi_{2000} + N_2(\varphi_0^+, \varphi_0^+) &= 2iK\Phi_{2000}, \\ L\Phi_{1100} + 2N_2(\varphi_0^+, \varphi_0^-) &= 0. \end{aligned}$$

On obtient

$$\Phi_{1100} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\lambda}{\lambda-1} \cdot \frac{\sinh(2\kappa)+\kappa}{\kappa \cosh^2 \kappa} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_{2000} = \begin{pmatrix} i\mathcal{A} \\ -2\mathcal{A}K \\ -4i\mathcal{A}K^2 \\ \frac{\cosh 2(K\psi+\kappa)}{2 \cosh^2 \kappa} (1 - \mathcal{A} \coth \kappa) + \frac{1}{\cosh^2 \kappa} \\ i\mathcal{A} \frac{\sinh 2(K\psi+\kappa)}{\sinh(2\kappa)} \end{pmatrix}$$

où

$$\mathcal{A} = 2\kappa \tanh \kappa \frac{2 + \cosh(2\kappa)}{32\kappa \cosh^2 \kappa - 2\kappa \cosh(2\kappa) - 15\lambda \sinh(2\kappa)}, \quad (4.4.30)$$

avec le comportement asymptotique pour  $\mathcal{A}$  :

$$\mathcal{A} \sim \frac{8}{11} \text{ pour } \kappa \rightarrow \infty, \quad \mathcal{A} \sim \frac{2}{\kappa} \text{ pour } \kappa \rightarrow 0.$$

Finalement on trouve pour  $q_2$

$$\begin{aligned} q_2 &= \frac{\mathcal{C}_0}{2\kappa(\lambda-1) \cosh^3 \kappa} \\ &[\lambda \sinh^2 \kappa (11 \cosh^2 \kappa - 3) + 2\kappa^2 + \kappa \sinh \kappa \cosh \kappa (3 + \cosh^2 \kappa) - 3\lambda^2 \sinh^4 \kappa \\ &+ \mathcal{A} \cosh^2 \kappa (1 + 2 \cosh^2 \kappa) (\lambda - 1) \kappa - \sinh \kappa \cosh \kappa (\cosh^2 \kappa - 5) \lambda \kappa]. \end{aligned}$$

Tous les calculs symboliques nécessaires pour obtenir  $\Phi_{1100}, \Phi_{2000}, q_2$ , les termes non-linéaires  $N_2(\mathbf{w}, \mathbf{w}), N_3(\mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{w})$  ont été effectuées avec le logiciel MAPLE.

Le signe de  $q_2$  dépend des paramètres physiques. Le coefficient  $q_2$  est représenté dans la Figure 4.2. C'est une fonction monotone décroissante de  $\kappa$ , telle que

$$q_2 \rightarrow \infty \text{ pour } \kappa \rightarrow 0, \quad q_2 \rightarrow -\frac{79}{528} 4^{1/3} \approx -0.2375 \text{ pour } \kappa \rightarrow \infty.$$

Il s'annule pour  $\kappa \approx 5.79$  (les valeurs correspondantes de  $\lambda$  et  $f$  sont 4.34 et 0.473).

La valeur de  $q_2$  dans les expériences de Takizawa est environ 1.06. On peut associer

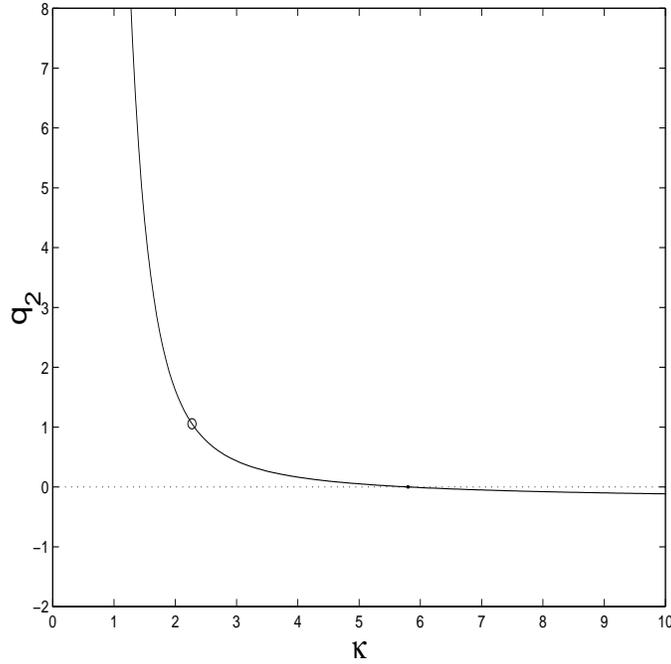


FIG. 4.2 – Le graphe du coefficient  $q_2$  donné par (4.4.31) en fonction de  $\kappa$ . Les grandes valeurs de  $\kappa$  correspondent à l'eau profonde et les petites valeurs de  $\kappa$  correspondent à l'eau peu profonde. Le cercle correspond aux expériences de Takizawa et le point correspond à  $q_2 = 0$ .

l'annulation de  $q_2$  à une profondeur critique du fluide. Pour une profondeur plus grande que cette profondeur critique,  $q_2$  est négatif et pour une profondeur plus petite,  $q_2$  est positif. Dans les expériences de Takizawa, si la profondeur de l'eau pouvait varier, la profondeur critique serait d'environ 17 mètres.

#### 4.4.2 Solutions de la forme normale

Dans [14] il a été montré que le système (4.4.25)-(4.4.26) est intégrable avec comme intégrales premières

$$I_1 = \frac{1}{2}i(A\bar{B} - \bar{A}B) \quad \text{et} \quad I_2 = |B|^2 - G(\mu, |A|^2, \frac{1}{2}i(A\bar{B} - \bar{A}B))$$

où  $G(\mu, u, v) = \int_0^u Q(\mu, s, v) ds$ . On considère la transformation

$$A(x) = r_0(x)e^{i(Kx+\theta_0)}, \quad B(x) = r_1(x)e^{i(Kx+\theta_1)}.$$

Si l'on note  $u_0 = r_0^2$ ,  $u_1 = r_1^2$ , le système (4.4.25)-(4.4.26) devient

$$\left(\frac{du_0}{dx}\right)^2 = 4\{u_0[G(\mu, u_0, I_1) + I_2] - I_1^2\} \quad (4.4.31)$$

$$\frac{d(\theta_1 - \theta_0)}{dx} = -I_1(u_0 u_1)^{-1}[u_0 Q(\mu, u_0, I_1) + G(\mu, u_0, I_1) + I_2]. \quad (4.4.32)$$

On observe que les solutions stationnaires de (4.4.31), qui correspondent aux solutions périodiques de (4.4.25)-(4.4.26), sont données par les racines doubles du polynôme

$$f_0(u_0) = u_0[G(\mu, u_0, I_1) + I_2] - I_1^2.$$

Pour  $\mu$  fixé, on introduit les nouvelles échelles et nouveaux paramètres [14] :

$$I_1 = |\mu|^{3/2} i_1, \quad I_2 = \mu^2 i_2, \quad u_0 = |\mu| v_0$$

et on obtient

$$f_0(|\mu| v_0) = |\mu|^3 g_0(v_0) + O(|\mu|^{7/2})$$

où  $g$  est la fonction polynômiale cubique

$$g_0(v_0) = v_0 i_2 + q_1 \operatorname{sgn} \mu v_0^2 - \frac{q_2}{2} v_0^3 - i_1^2.$$

Donc, les racines doubles de  $f$  d'ordre petit en  $\mu$  sont données par les racines doubles du polynôme  $g_0$ . L'étude complète des régions dans l'espace des paramètres  $(i_1, i_2)$  où il y a des solutions périodiques, quasi-périodiques et homoclines, en fonction des signes de  $q_2$  et  $\mu$ , est donnée dans [14]. Pour  $q_2 > 0$  toutes les solutions bornées se trouvent à l'intérieur de la courbe

$$i_1 = \pm \sqrt{q_2 v_0^3 - \operatorname{sgn} \mu q_1 v_0^2}, \quad i_2 = \frac{3}{2} q_2 v_0^2 - 2 \operatorname{sgn} \mu q_1 v_0$$

dans l'espace  $(i_1, i_2)$ . Pour  $\mu > 0$  le point  $(0, 0)$  correspond aux solutions homoclines à zéro.

Dans le cas  $q_2 < 0$  on ne trouve pas d'ondes solitaires, mais on trouve des ondes solitaires "noires", c'est-à-dire des solutions homoclines à une orbite périodique qui peut avoir des amplitudes très faibles dans la partie centrale de l'onde [5]. Dans le cas dégénéré  $q_2 \approx 0$ , plusieurs coefficients doivent être calculés pour étudier les solutions bornées et petites. En particulier, le signe de  $q_4$  est important (voir [5]).

Dans le cas des expériences de Takizawa on a vu que  $q_2$  est positif. En plus, la vitesse doit être plus petite que  $c_{\min}$  pour satisfaire les conditions d'existence des ondes solitaires. Les solutions qui nous intéressent sont les réversibles qui persistent pour le système entier (voir [14]). Elles sont données sous la forme explicite jusqu'à l'ordre  $\sqrt{\mu}$  dans [4] :

$$\begin{aligned} r_0(x) &= \pm \sqrt{\frac{2\mu q_1}{q_2}} \frac{1}{\cosh(\sqrt{\mu q_1} x)} \\ r_1(x) &= \mp \mu q_1 \sqrt{\frac{2}{q_2}} \frac{\sinh(\sqrt{\mu q_1} x)}{\cosh(\sqrt{\mu q_1} x)^2} \\ \theta_0(x) &= p_1 \mu x + 2 \frac{p_2}{q_2} \sqrt{\mu q_1} \tanh(\sqrt{\mu q_1} x) \end{aligned}$$

et  $\theta_0(x) = \theta_1(x)$ . Ayant calculé  $A$  et  $B$ , on trouve  $\mathbf{w}$  et, en utilisant (4.1.9),  $\eta$  jusqu'à l'ordre  $\sqrt{\mu}$ . Il y a deux types d'ondes : ondes solitaires d'élévation ( $\eta(0) > 0$ ) et ondes solitaires de dépression ( $\eta(0) < 0$ ). Leurs profils sont donnés par

$$\eta = \pm 2 \sqrt{\frac{2\mu q_1}{q_2}} \frac{1}{\cosh(\sqrt{\mu q_1} x)} \cos(Kx) \frac{\tanh \kappa}{K}.$$

On montre ici deux ondes solitaires de dépression dans la Figure 4.3, à l'ordre dominant, celles d'élévation étant symétriques par rapport à l'axe  $Ox$ . Si  $\kappa$  est fixé et  $\mu$  décroît on observe que les ondes deviennent "de plus en plus périodiques" (des oscillations de plus en plus nombreuses apparaissent), et l'amplitude des oscillations décroît vers zéro. Quand  $\mu$  devient plus grand, les ondes décroissent plus vite à l'infini.

L'expression de la déformation de l'interface eau-glace devient dans les variables physiques

$$\zeta(x^*, t) = \pm 2 \sqrt{\frac{2\mu q_1}{q_2}} \frac{1}{\cosh[\sqrt{\mu q_1}(x^* + ct)]} \cos[k(x^* + ct)] \frac{\tanh(kH)}{k}. \quad (4.4.33)$$

Les paramètres  $H$  et  $D$  ont été choisis comme dans les expériences. L'amplitude  $|\zeta(0)|$  des ondes est environ 1.4 m et 76 cm. Elles sont deux ordres de grandeur plus grandes que l'amplitude des ondes montrées dans 3.1. En fait, elles ne sont pas réalistes, mais il ne faut pas oublier que la comparaison est difficile à faire, parce que (4.4.33) est obtenu en l'absence de la charge sur la glace.

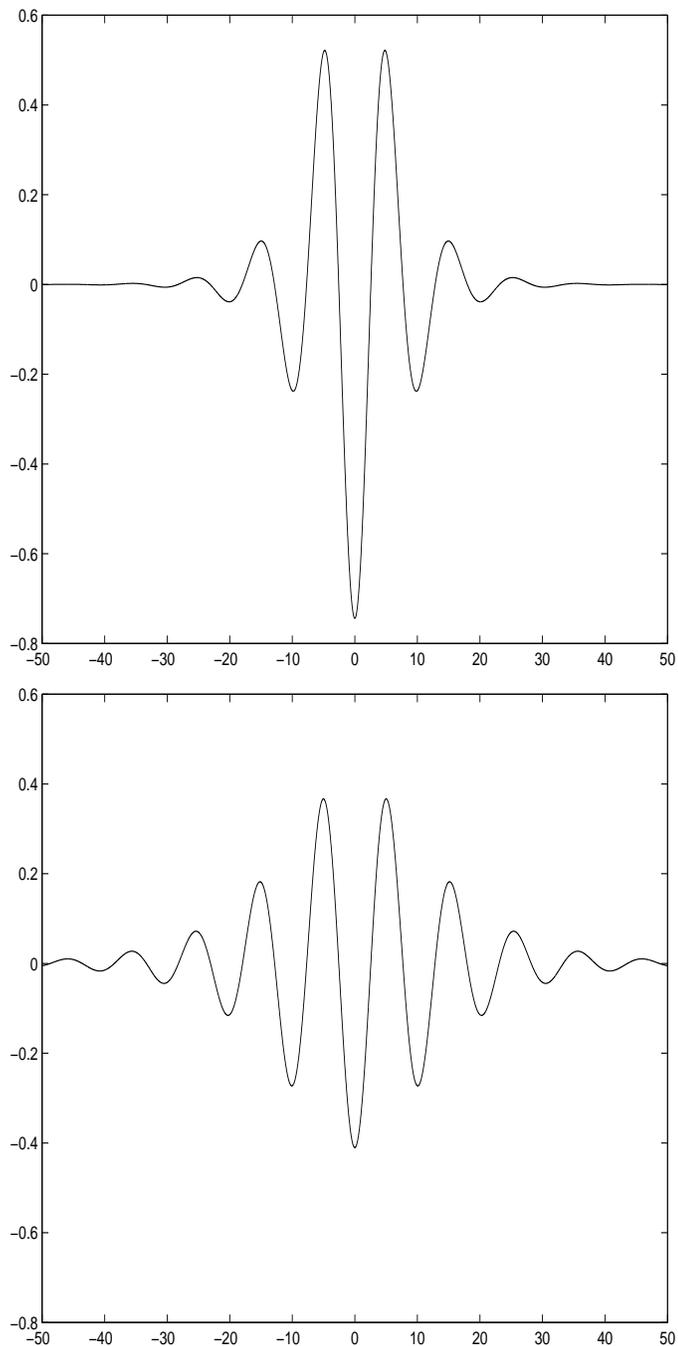


FIG. 4.3 – Graphe de  $\eta(x)$  pour deux ondes solitaires de dépression. A l'exception de la charge, qui est absente, les paramètres sont les mêmes que dans les expériences de Takizawa. En haut :  $c = 5.8$  m/s, i.e.  $f = 0.552$  et  $\lambda = 1.98$ . Par conséquent,  $\kappa = 2.19$  et  $\mu = 0.065$ . L'unité de longueur est  $L = 1.9$  m. En bas :  $c = 6$  m/s, i.e.  $f = 0.504$  et  $\lambda = 1.85$ . Par conséquent,  $\kappa = 2.25$  et  $\mu = 0.019$ . L'unité de longueur est  $L = 1.85$  m.

# Chapitre 5

## Résolution numérique du problème nonlinéaire

Le but de ce chapitre est de montrer que l'analyse faiblement nonlinéaire effectuée dans les chapitres précédents est satisfaisante pour les cas d'intérêt physique.

Les ondes solitaires pour le problème nonlinéaire sont calculées numériquement. Ce schéma est exactement le même que celui utilisé dans [6] dans le cas des ondes de surface. Seul le terme qui contient la tension superficielle dans le problème des ondes de capillarité-gravité est remplacé par le terme qui contient la flexion.

### 5.1 Schéma numérique

On cherche des solutions numériques pour les équations d'Euler stationnaires. Le problème est résolu en utilisant une technique d'équation intégrale aux frontières. On réécrit le système (4.1.1)–(4.1.4) en fonction du potentiel des vitesses

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times \left(-\frac{\lambda}{f}, \eta(x)\right), \quad (5.1.1)$$

$$\phi_y = 0 \quad \text{pour } y = -\frac{\lambda}{f}, \quad (5.1.2)$$

$$\phi_x \eta_x - \phi_y = 0 \quad \text{pour } y = \eta(x), \quad (5.1.3)$$

$$\frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2 - 1) + f\eta + \partial_{xx}^2 \frac{\eta_{xx}}{(1 + \eta_x^2)^{3/2}} = 0 \quad \text{pour } y = \eta(x). \quad (5.1.4)$$

Le calcul est limité aux ondes solitaires symétriques. Les inconnues du problème sont la frontière eau-glace et le potentiel des vitesses. On choisit comme variable indépendante le potentiel complexe

$$\mathcal{F}(z) = \phi + i\psi \quad \text{où } z = x + iy.$$

Les vitesses peuvent s'écrire

$$u - iv = \frac{d\mathcal{F}}{dz} = \left( \frac{dz}{d\mathcal{F}} \right)^{-1} = \frac{1}{x_\phi + iy_\phi}$$

d'où

$$u = \frac{x_\phi}{x_\phi^2 + y_\phi^2}, \quad v = \frac{y_\phi}{x_\phi^2 + y_\phi^2}.$$

On rappelle que  $\psi$  a été choisi égal à 0 sur l'interface et que par conséquent  $\psi$  est égal à  $-\frac{\lambda}{f}$  sur le fond. A l'interface le potentiel peut être supposé nul en  $x = 0$ . On note  $x'(\phi) = x_\phi(\phi + 0i)$  et  $\eta'(\phi) = y_\phi(\phi + 0i)$  les valeurs de  $x_\phi$  et  $y_\phi$  sur l'interface  $\psi = 0$ . La condition cinématique à l'interface devient

$$\eta_x = \frac{\eta'}{x'}.$$

L'équation de Bernoulli s'écrit sous la forme suivante

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{x'^2 + \eta'^2} - 1 \right) + f\eta + \frac{S}{x'^3(x'^2 + \eta'^2)^{7/2}} = 0, \quad (5.1.5)$$

où

$$\begin{aligned} S = & -x'\eta'^5 x^{(iv)} - 3x''\eta'^4 \eta'' + x''\eta'^5 x''' - 2x'^3 \eta'^3 x^{(iv)} - 4x'^5 \eta'' x''' + 2x'^4 \eta^{(iv)} \eta'^2 + x'^2 \eta^{(iv)} \eta'^4 \\ & + 15\eta'' x'^4 x''^2 + 12\eta''^3 x'^2 \eta'^2 - 15\eta' x''^3 x'^3 + x'^6 \eta^{(iv)} - 6\eta''' x'^5 x'' - x'^5 \eta' x^{(iv)} \\ & - 3x'^4 \eta''^3 - 33\eta'^2 x''^2 x'^2 \eta'' - 9\eta''' x'^4 \eta' \eta'' - 3\eta''' x'^3 \eta'^2 x'' - 9\eta''' x'^2 \eta'^3 \eta'' + 10\eta' x''' x'^4 x'' \\ & + \eta'^2 x''' x'^3 \eta'' + 11\eta'^3 x''' x'^2 x'' + 36\eta''^2 x'^3 x'' \eta' + 5x' \eta'^4 x''' \eta'' - 9x' \eta'^3 x'' \eta''^2 + 3x' \eta''' x'' \eta'^4. \end{aligned}$$

Il est facile de voir la différence existente entre ce problème et le problème des ondes de capillarité-gravité où, au lieu du terme nonlinéaire qui contient  $S$  dans l'équation de Bernoulli, on a un terme beaucoup plus simple (voir [6]) :

$$\frac{\eta' x'' - x' \eta''}{(x'^2 + \eta'^2)^{3/2}}.$$

On cherche  $\frac{dz}{d\mathcal{F}}$  dans le domaine  $-\frac{\lambda}{f} \leq \psi \leq 0, \phi \in \mathbb{R}$ . Le fait que  $u - iv \rightarrow 1$  quand  $|x| \rightarrow \infty$  entraîne  $\frac{dz}{d\mathcal{F}} \rightarrow 1$  quand  $|\phi| \rightarrow \infty$ , donc  $x_\phi + iy_\phi \rightarrow 1$ .

La fonction  $x'(\phi)$  peut s'exprimer en fonction de  $\eta'(\phi)$ . On observe que la fonction  $y_\phi$  est nulle sur le fond  $\psi = -\frac{\lambda}{f}$ . On peut prolonger la fonction  $x_\phi - 1 + y_\phi$  par symétrie par rapport à la droite  $\psi = -\frac{\lambda}{f}$  à une fonction analytique dans le domaine  $[-2\frac{\lambda}{f}, 0]$ . Donc

$$(x_\phi + iy_\phi)(\phi - 2\frac{\lambda}{f}i) = (x_\phi - iy_\phi)(\phi + 0i).$$

Pour calculer la valeur de la fonction  $x' - 1 + i\eta'$  en un point  $\phi_0$  de la surface libre on applique la formule intégrale de Cauchy sur le chemin  $C_R$  dans la Figure 5.1 :

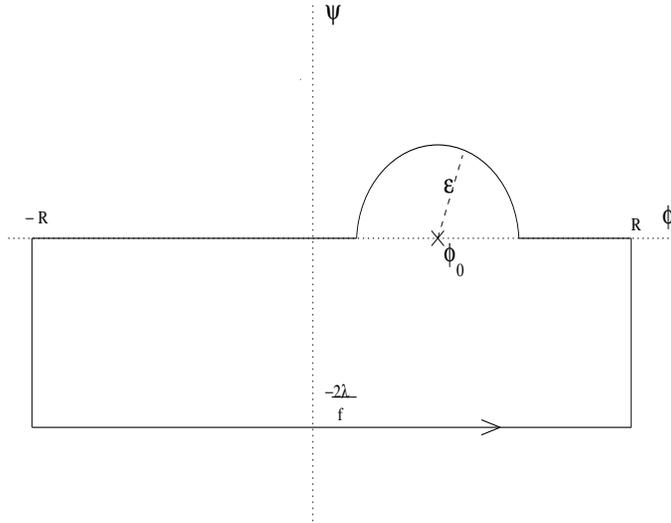


FIG. 5.1 – Le chemin d'intégration  $C_R$  dans le plan  $(\phi, \psi)$ .

$$(x' - 1 + i\eta')(\phi_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{(x_\phi - 1 + iy_\phi)(\phi + i\psi)}{\phi + i\psi - \phi_0} d(\phi + i\psi)$$

donc

$$\begin{aligned} (x' - 1 + i\eta')(\phi_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^{+R} \frac{(x_\phi - 1 + iy_\phi)(t - 2\frac{\lambda}{f}i)}{t - 2i\frac{\lambda}{f} - \phi_0} dt + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-2\frac{\lambda}{f}}^0 \frac{(x_\phi - 1 + iy_\phi)(R + it)}{R + it - \phi_0} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{+R}^{\phi_0 + \varepsilon} \frac{(x_\phi - 1 + iy_\phi)(t + i0)}{t - \phi_0} dt + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (x_\phi - 1 + iy_\phi)(\phi_0 + \varepsilon \cos \theta + i\varepsilon \sin \theta) d\theta + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\phi_0 - \varepsilon}^{-R} \frac{(x_\phi - 1 + iy_\phi)(t + i0)}{t - \phi_0} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-2\frac{\lambda}{f}} \frac{(x_\phi - 1 + iy_\phi)(-R + it)}{-R + it - \phi_0} dt. \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

Quand on passe à la limite  $R \rightarrow \infty$ , on observe que les intégrales sur les segments verticaux convergent vers 0, en utilisant le fait que la fonction  $(x_\phi - 1 + iy_\phi)(\pm R + it)$  est bornée pour  $R \rightarrow \infty$ . De plus, si on passe à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  dans la quatrième intégrale ci-dessus on trouve la valeur  $(x' - 1 + i\eta')(\phi_0)/2$ . En prenant la partie réelle de l'équation (5.1.6), après quelques calculs, on obtient

$$x'(\phi) = 1 - \frac{1}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta'(t)}{t - \phi_0} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\frac{\lambda}{f}(x'(t) - 1) - (t - \phi_0)\eta'(t)}{(t - \phi_0)^2 + 4(\frac{\lambda}{f})^2} dt$$

ou

$$\begin{aligned} x'(\phi_0) - 1 &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \eta'(t) \left( \frac{1}{t - \phi_0} + \frac{1}{t + \phi_0} \right) dt \\ &+ \frac{f}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{f(\phi_0 - t)\eta'(t) + 2\lambda(x'(t) - 1)}{f^2(t - \phi_0)^2 + 4\lambda^2} dt \\ &+ \frac{f}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{-f(\phi_0 + t)\eta'(t) + 2\lambda(x'(t) - 1)}{f^2(t + \phi_0)^2 + 4\lambda^2} dt. \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

Les équations (5.1.5) et (5.1.7) définissent un système intégro-différentiel pour les inconnues  $x'(\phi)$  et  $\eta'(\phi)$  qu'on résout en utilisant la méthode décrite dans [6]. Le système est discrétisé en choisissant  $N$  points pour le potentiel  $\phi_i = (i - 1)\Delta\phi$ ,  $i = 1, N$  avec  $\Delta\phi$  constant. Les intégrales dans l'équation (5.1.7) sont évaluées aux points milieu  $\phi_i^M = \phi_i + \frac{1}{2}\Delta\phi$ ,  $i = 1, N - 1$  qui donnent  $x'(\phi_i^M)$  en fonction de  $\eta'(\phi_i)$ . On remplace toutes les quantités qui interviennent dans l'équation (5.1.5) en utilisant les formules de différences finies et d'interpolation. Le système nonlinéaire ainsi obtenu pour les inconnues  $\eta'(\phi_i)$ , complété par la condition de symétrie  $\eta'(\phi_1) = 0$  et une condition de troncature  $\eta'(\phi_N) = 0$  est résolu par la méthode de Newton pour des valeurs de  $\lambda$  et  $f$  fixées. Le pas de discrétisation  $\Delta\phi$  est un paramètre important pour la précision des calculs numériques.

## 5.2 Résultats numériques

On a utilisé comme données initiales les solutions analytiques obtenues dans le chapitre précédent. La plupart des calculs ont été effectués avec 800 ou 1200 points et la longueur de l'intervalle de discrétisation a été choisie  $\Delta\phi = 0.05$ . Parce qu'il n'y a pas de solutions uniques le schéma est sensible aux données initiales. Comme dans le problème des ondes de capillarité-gravité, on s'attend à trouver un pléthora de solutions.

On a observé que si la vitesse s'approche de  $c_{\min}$ , les oscillations deviennent plus visibles et leur décroissance est moins rapide. Dans le voisinage des courbes prédites par l'analyse du système dynamique on montre deux profils, d'élévation et de dépression dans la Figure 5.2. L'effet de troncature peut être observé, surtout pour l'onde d'élévation.

On observe que même pour des valeurs de  $\mu$  petites ( $\mu \approx 10^{-2}$ ), la déformation de l'interface entre la couche de glace et l'eau est assez grande ( $\approx 60$  cm). Comme souligné par Forbes [9, 10], on ne s'attend pas à ce que les solutions de grande amplitude soient pertinentes pour le comportement de la glace. En effet, la glace peut se briser, ayant comme résultat la formation de blocs flottants de glace. Donc, uniquement les petites valeurs de  $\mu$  sont d'intérêt physique dans ce cas. Pour des valeurs plus grandes de  $\mu$  la théorie linéaire est suffisante pour décrire les phénomènes observés.

Nous donnons tout de même quelques résultats numériques obtenus en introduisant la pression due à la charge qui se déplace sur la glace dans l'annexe B.

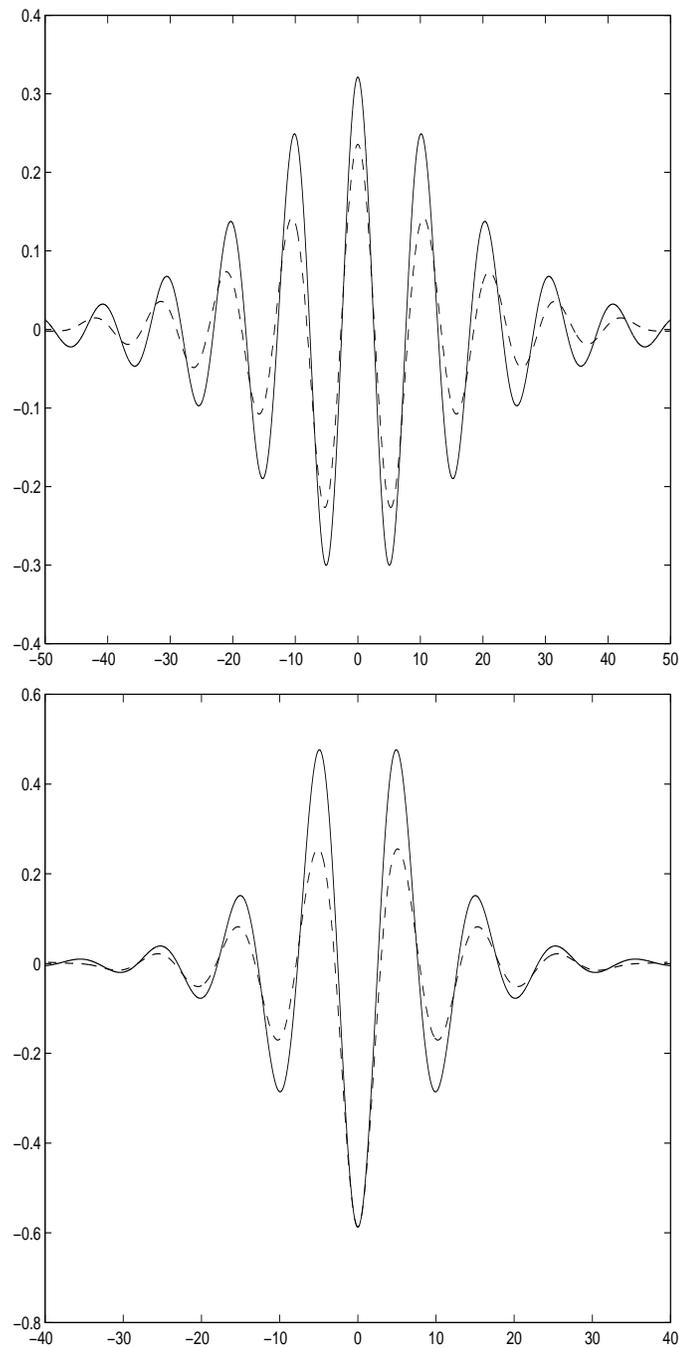


FIG. 5.2 – Les profils  $\eta(x)$  pour une onde solitaire d'élevation (en haut) avec  $f = 0.4959$ ,  $\lambda = 1.838$ ,  $\mu = 0.018$  et pour une onde solitaire de dépression (en bas) avec  $f = 0.5215$ ,  $\lambda = 1.933$ ,  $\mu = 0.036$ . Pour les deux ondes,  $f/\lambda \approx 0.27$ . Les solutions analytiques sont en trait plein et les solutions numériques en tirets.

# Chapitre 6

## Résultats faiblement nonlinéaires en présence d'un véhicule se déplaçant sur la couche de glace

Une analyse asymptotique similaire à celle utilisée par Akylas [1] peut être utilisée. Bien que la solution du problème linéaire soit singulière à cause de la résonance 1 :1, la réponse reste bornée si les termes nonlinéaires sont inclus. Elle est gouvernée par une équation de Schrödinger nonlinéaire forcée. Dans ce cas, on peut obtenir des ondes solitaires même si  $q_2 < 0$ .

### 6.1 Dérivation de l'équation de Schrödinger nonlinéaire forcée

L'équation de Schrödinger nonlinéaire forcée peut être obtenue par une méthode d'échelles multiples [1] ou en utilisant la méthode des systèmes dynamiques donnée dans [18], [16], [21]. En fait, l'analyse donnée pour obtenir le système dynamique dans le Ch. 4 est bien adaptée, la seule différence intervenant dans l'équation de Bernoulli (4.1.4) à l'interface entre la couche de glace et le fluide :

$$\frac{1}{2}(u^2 + v^2 - 1) + f\eta + \partial_{xx}^2 \frac{\eta_{xx}}{(1 + \eta_x^2)^{3/2}} + \epsilon p_0 = 0 \quad \text{pour } y = \eta(x). \quad (6.1.1)$$

On a noté  $\epsilon p_0(x)$  la pression adimensionnelle. On suppose la fonction  $p_0$  ayant le support compact (voir [16]). Si on réécrit l'équation (6.1.1) à l'aide des variables introduites dans

le Ch. 4 on obtient

$$\gamma_x = (1 + \alpha^2)^{3/2}(-w_1(\cdot, 0) - \lambda[\frac{1}{u}] + \lambda - \epsilon p_0) + \frac{3\beta^3 + 9\alpha\beta\gamma}{1 + \alpha^2} - \frac{15\alpha^2\beta^3}{(1 + \alpha^2)^2} \quad (6.1.2)$$

et le système dynamique (4.1.10) devient

$$\mathbf{w}_x = L\mathbf{w} + N'(\mathbf{w}), \quad (6.1.3)$$

La nonlinéarité peut être mise sous la forme

$$N'(\mathbf{w}) = N_{\epsilon=0}(\mathbf{w}) + N_{\epsilon \neq 0}(\mathbf{w}),$$

$N_{\epsilon=0}(\mathbf{w})$  étant  $N(\mathbf{w})$  donné en Ch. 4 et  $N_{\epsilon \neq 0}(\mathbf{w}) = (0, 0, -\epsilon p_0, 0, 0)^T + \dots$  où les points désignent les termes d'ordre supérieur qui contiennent  $\mathbf{w}$  et  $\epsilon$ . On note que pour  $\epsilon = 0$  on a le même système réversible qu'auparavant. Dans ce cas on peut appliquer une version du théorème de réduction à la variété centrale pour des systèmes non-autonomes (voir [16]). Dans notre cas l'équation réduite (4.3.21) devient

$$\partial_x \mathbf{w}_0 = L_0 \mathbf{w}_0 + f'_0(\mu, \epsilon, \cdot, \mathbf{w}_0) \quad (6.1.4)$$

où

$$f'_0(\mu, \epsilon, \cdot, \mathbf{w}_0) = N'_0(\mu, \epsilon, \cdot, \mathbf{w}_0 + h(\mu, \epsilon, \cdot, \mathbf{w}_0)),$$

et  $N'_0$  est la projection de  $N'$  sur  $X_0$ . La fonction  $f_0$  peut être décomposée en une partie réversible et une partie non-réversible

$$f_{00}(\mu, \mathbf{w}_0) = f'_{0|\epsilon=0}(\mu, \epsilon, \cdot, \mathbf{w}_0), \quad f_{01}(\mu, \epsilon, \cdot, \mathbf{w}_0) = f'_0(\mu, \epsilon, \cdot, \mathbf{w}_0) - f_{00}(\mu, \mathbf{w}_0).$$

En utilisant de nouveau la méthode décrite par Dias et Iooss dans [4] on peut écrire les solutions petites et bornées sous la forme

$$\mathbf{w} = A(x)\varphi_0^+ + B(x)\varphi_1^+ + \bar{A}(x)\varphi_0^- + \bar{B}(x)\varphi_1^- + \Phi(\mu, \epsilon; x, A, B, \bar{A}, \bar{B}), \quad (6.1.5)$$

et, en utilisant la forme normale du système pour la partie réversible ( $\epsilon = 0$ ) et la projection de la partie nonréversible sur l'espace  $X_0$  on obtient

$$A_x = iKA + B + iAP(\mu; |A|^2, \frac{1}{2}i(A\bar{B} - \bar{A}B)) - i\epsilon p_0 \mathcal{C}_0 \mathcal{C}_1 \sinh \kappa + \dots \quad (6.1.6)$$

$$B_x = iKB + iBP(\mu; |A|^2, \frac{1}{2}i(A\bar{B} - \bar{A}B)) + AQ(\mu; |A|^2, \frac{1}{2}i(A\bar{B} - \bar{A}B)) + \epsilon p_0 \mathcal{C}_0 \sinh \kappa + \dots \quad (6.1.7)$$

où  $P$  et  $Q$  sont les polynômes définis dans le Ch. 4,  $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1$  sont les constantes qui apparaissent dans les expressions des vecteurs  $\psi_0, \psi_1$  et les points représentent les termes d'ordre supérieure de la partie non-réversible. On effectue le changement d'échelle (voir [21])

$$A(x)e^{-iKx} = \sqrt{|\mu|}\check{A}(\check{x}), \quad B(x)e^{-iKx} = |\mu|\check{B}(\check{x}), \quad \check{x} = \sqrt{|\mu|x},$$

$$P_0(\check{x}) = p_0(x)e^{-iKx}, \quad \epsilon\mathcal{C}_0 \sinh \kappa \langle p_0(\cdot)e^{-iK\cdot} \rangle = |\mu|\check{\epsilon},$$

où  $\langle f \rangle$  est défini comme  $\langle f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$  et on suppose de plus  $\langle p_0(\cdot)e^{-iK\cdot} \rangle \in \mathbb{R}^*$ . Le système (6.1.6)-(6.1.7) s'écrit alors

$$\begin{cases} \check{A}_{\check{x}} &= \check{B} + O(\sqrt{|\mu|}) \\ \check{B}_{\check{x}} &= \check{A}(q_1 \operatorname{sgn}(\mu) - q_2 |\check{A}|^2) + \check{\epsilon} \frac{P_0}{\langle P_0 \rangle} + O(\sqrt{|\mu|}) \end{cases} \quad (6.1.8)$$

On remplace  $P_0/\langle P_0 \rangle$  par  $\delta_0$ , la fonction de Dirac, en tenant compte du fait que  $P_0/\langle P_0 \rangle$  converge vers 0 pour chaque  $\tilde{x} \neq 0$  et que la moyenne  $\langle P_0/\langle P_0 \rangle \rangle$  soit égale à 1. On obtient alors à l'ordre dominant l'équation de Schrödinger nonlinéaire forcée pour  $\check{A}$  :

$$\check{A}_{\check{x}\check{x}} = q_1 \operatorname{sgn}(\mu)\check{A} - q_2 \check{A}|\check{A}|^2 + \check{\epsilon}\delta_0. \quad (6.1.9)$$

Si on revient aux variables physiques, en tenant compte de la forme particulière de la pression (supposée dans le Chapitre 2), l'équation de Schrödinger nonlinéaire forcée devient

$$\tilde{A}_{xx} = q_1 \mu \tilde{A} - q_2 \tilde{A}|\tilde{A}|^2 + \varepsilon \delta_0 \quad (6.1.10)$$

avec la notation  $\tilde{A} = Ae^{-iKx}$  et  $\varepsilon = \mathcal{C}_0 \sinh(\kappa) P/\rho c^2$ , (voir Eq. (4.4.28) pour l'expression de  $\mathcal{C}_0$ ). Pour  $P$  positif comme dans le Ch. 3,  $\varepsilon$  est positif. Ensuite on n'étudie que les solutions de (6.1.10), sans aborder le problème de la persistance des solutions pour le système initial.

## 6.2 Solutions pour l'équation de Schrödinger nonlinéaire forcée

L'équation (6.1.10) est autonome pour les intervalles  $(-\infty, 0)$  et  $(0, \infty)$ . On cherche des solutions de (6.1.10), c'est-à-dire des fonctions  $\tilde{A}$  continues, bornées pour  $x \in \mathbb{R}$ , qui satisfont  $\tilde{A}_{xx} = q_1 \mu \tilde{A} - q_2 \tilde{A}|\tilde{A}|^2$  pour  $x \neq 0$  et qui ont un saut dans la première dérivée  $\tilde{A}_x(0+) - \tilde{A}_x(0-) = \varepsilon$ .

Pour résoudre l'équation (6.1.10) on écrit  $\tilde{A}(x) = s(x)e^{i\theta(x)}$  avec  $s$  et  $\theta$  des fonctions réelles. En utilisant la continuité de  $\tilde{A}$ , on peut supposer que  $s$  et  $\theta$  sont aussi continues, en admettant que  $s$  puisse prendre des valeurs négatives. L'équation (6.1.10) devient

$$s_{xx} - q_1\mu s + q_2s^3 - s(\theta_x)^2 - \varepsilon \cos \theta \delta_0 = 0, \quad (6.2.11)$$

$$2\theta_x s_x + s\theta_{xx} + \varepsilon \sin \theta \delta_0 = 0. \quad (6.2.12)$$

La condition de saut dans la dérivé  $A_x$  peut s'écrire

$$s_x(0+) - s_x(0-) = \varepsilon \cos \theta(0), \quad s(0)(\theta_x(0+) - \theta_x(0-)) = -\varepsilon \sin \theta(0) \quad (6.2.13)$$

On multiplie l'équation (6.2.12) par  $s$  et on trouve

$$(s^2\theta_x)_x = -\varepsilon s \sin \theta \delta_0. \quad (6.2.14)$$

donc  $s^2\theta_x = \begin{cases} I_1, & x < 0 \\ I_2, & x > 0 \end{cases}$  où  $I_1, I_2$  sont des constantes qui vérifient  $I_2 - I_1 = -\varepsilon \sin \theta(0)s(0)$ .

Maintenant, on multiplie l'équation (6.2.11) par  $2s_x$  et, en l'intégrant on obtient

$$s_x^2 = q_1\mu s^2 - \frac{q_2}{2}s^4 - I_1\theta_x + H_1, \quad x < 0 \quad (6.2.15)$$

$$s_x^2 = q_1\mu s^2 - \frac{q_2}{2}s^4 - I_2\theta_x + H_2, \quad x > 0 \quad (6.2.16)$$

où  $H_1, H_2$  sont des constantes qui vérifient  $H_2 - H_1 = s_x^2(0+) - s_x^2(0-) + I_2\theta_x(0+) - I_1\theta_x(0-)$ . En notant  $s^2 = u$  et en multipliant (6.2.15)-(6.2.16) par  $s^2$  on obtient le système suivant

$$\begin{cases} \frac{1}{4}u_x^2 = q_1\mu u^2 - \frac{q_2}{2}u^3 - I_1^2 + H_1u, & u\theta_x = I_1, \quad x < 0 \\ \frac{1}{4}u_x^2 = q_1\mu u^2 - \frac{q_2}{2}u^3 - I_2^2 + H_2u, & u\theta_x = I_2, \quad x > 0 \end{cases} \quad (6.2.17)$$

La forme des fonctions cubiques qui se trouvent dans la partie droite des équations pour  $u_x$  dans (6.2.17) détermine le type des solutions.

### 6.2.1 Ondes solitaires

L'existence des ondes solitaires est étudiée en fonction des signes de  $q_1, \mu$  et  $q_2$ . Pour le problème de la couche de glace  $q_1$  est toujours positif pour toutes les conditions physiques, donc on peut prendre  $q_1 > 0$ .

La condition de décroissance vers 0 quand  $x \rightarrow \pm\infty$  pour  $u$  dans (6.2.17) implique  $I_1 =$

$I_2 = 0$  et, si on regarde (6.2.15)-(6.2.16),  $H_1 = H_2 = 0$ . Ces conditions sont satisfaites si  $\sin(\theta(0)) = 0$  et  $s_x(0+) = -s_x(0-) = \frac{\varepsilon}{2}$ . De plus, on peut prendre  $\theta(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , étant donné que  $\theta$  est constant et que  $\sin(\theta(0)) = 0$ . Il y a aussi une condition de saut dans la dérivée  $u_x$  qui doit être remplie pour avoir des solutions  $u_x(0+) - u_x(0-) = \pm 2s(0)\varepsilon$ . Si l'on observe la fonction  $f(u) = q_1\mu u^2 - \frac{q_2}{2}u^3$  on voit que des solutions homoclines à 0 peuvent être trouvées dans le cas  $\mu > 0, q_2 > 0$  comme dans le ch. 4. mais aussi dans les cas  $\mu > 0, q_2 < 0$  et  $\mu = 0, q_2 < 0$ . On montre dans la Fig. 6.1 les solutions qui peuvent apparaître dans l'espace  $(u, u_x)$ .

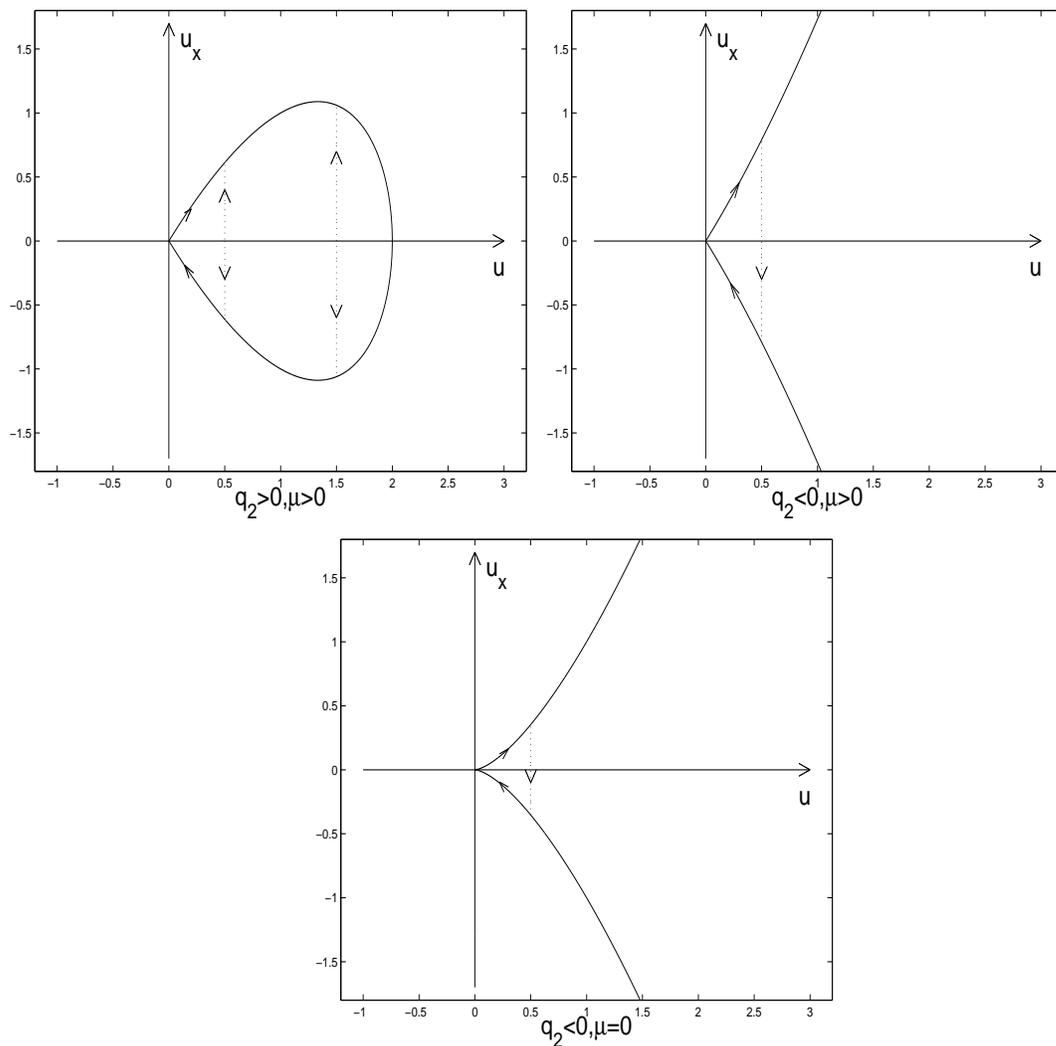


FIG. 6.1 – Solutions homoclines à 0 pour l'équation 6.1.10 dans l'espace  $(u, u_x)$  dans les cas où elles existent

Dans les conditions des expériences de Takizawa on a trouvé  $q_1 > 0$  et  $q_2 > 0$ . Des ondes solitaires peuvent être obtenues uniquement pour  $\mu$  positif, c'est-à-dire  $c < c_{\min}$ . En mettant la condition de saut en 0 pour la dérivée  $\frac{1}{4}u_x^2(0+) = u(0)\frac{\varepsilon^2}{4}$  dans l'équation pour  $u_x$  on obtient

$$u(0)\frac{\varepsilon^2}{4} = q_1\mu u(0)^2 - \frac{q_2}{2}u(0)^3$$

qui donne les conditions d'existence pour les ondes solitaires. On note

$$\mu^* = \frac{1}{q_1} \sqrt{\frac{q_2}{2}} \varepsilon.$$

Pour les expériences de Takizawa,

$$\varepsilon \approx 0.0026, \quad \mu^* \approx 0.004, \quad c^* = 6.06 \text{ m/s.}$$

Il y a quatre solutions homoclines à zéro pour  $\mu > \mu^*$ , deux correspondant aux ondes solitaires d'élévation et les deux autres aux ondes solitaires de dépression. Une onde d'élévation et une onde de dépression sont des perturbations des ondes trouvées sans pression dans le Ch. 4. L'autre onde de dépression est une perturbation de la solution linéarisée trouvée dans le Ch. 3. Quant à l'autre onde d'élévation, elle n'est pas liée aux solutions précédentes. Pour  $\mu = \mu^*$  il y a uniquement deux solutions, une onde solitaire d'élévation et une onde solitaire de dépression. Pour  $0 \leq \mu < \mu^*$  il n'existe pas d'orbites homoclines à zéro.

Dans le cas général, les solutions peuvent être écrites

$$s(x) = \begin{cases} \pm \sqrt{\frac{2\mu q_1}{q_2}} / \cosh(\sqrt{\mu q_1} x \pm \alpha_{1/2}) & \text{pour } x < 0 \\ \pm \sqrt{\frac{2\mu q_1}{q_2}} / \cosh(\sqrt{\mu q_1} x \mp \alpha_{1/2}) & \text{pour } x > 0 \end{cases} \quad (6.2.18)$$

où  $\alpha_{1/2}$  sont les solutions de

$$\frac{\sinh \alpha}{\cosh^2 \alpha} = \frac{\sqrt{q_2}}{2\sqrt{2}q_1} \frac{\varepsilon}{\mu}.$$

Cette équation admet deux, une ou zéro solutions positives, dépendant de la relation entre  $\mu$  et  $\mu^*$ . Les profils des ondes correspondantes sont donnés par

$$\eta(x) = 2s(x) \cos(Kx) \frac{\tanh \kappa}{K}. \quad (6.2.19)$$

Les quatre solutions de (6.2.18) et les profils correspondants (6.2.19) sont montrés dans la Fig. 6.2 et Fig. 6.3. La seule solution acceptable du point de vue physique est évidemment l'onde de dépression de faible amplitude.

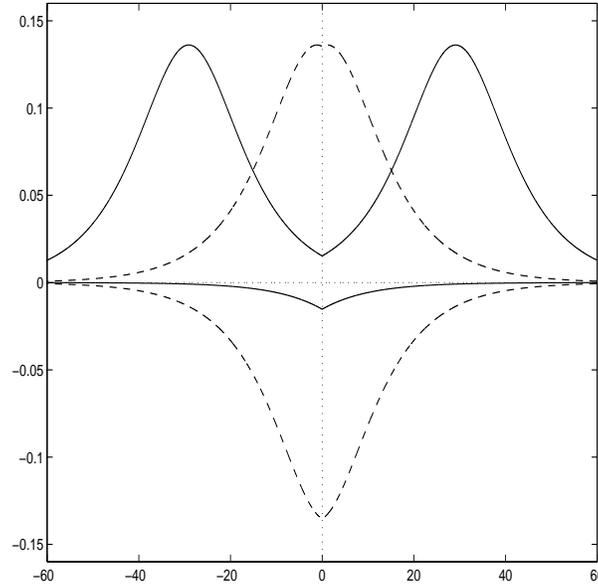


FIG. 6.2 – Profils de  $s(x)$  donnés par (6.2.18) dans le cas  $q_2 > 0$  avec  $\varepsilon = 0.003$ ,  $\mu = 0.02$ ,  $\kappa = 2.27$ .

Dans le cas  $q_2 < 0$ , qui correspond à une profondeur plus grande du fluide, des ondes solitaires peuvent de nouveau être obtenues pour  $\mu$  positif. Il faut mentionner que sans pression due à la charge, il n'existe pas d'ondes solitaires dans ce cas. Il y a une seule solution pour chaque  $\mu > 0$  qui donne une onde solitaire de dépression. Cette solution peut être considérée comme une perturbation de la solution linéarisée trouvée dans le Ch. 3. La solution peut être écrite

$$s(x) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{2\mu q_1}{|q_2|}} / \sinh(-\sqrt{\mu q_1} x + \alpha) & \text{pour } x < 0 \\ -\sqrt{\frac{2\mu q_1}{|q_2|}} / \sinh(\sqrt{\mu q_1} x + \alpha) & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

où  $\alpha$  est la seule racine positive de l'équation

$$\frac{\cosh \alpha}{\sinh^2 \alpha} = \frac{\sqrt{|q_2|} \varepsilon}{2\sqrt{2} q_1 \mu}.$$

Le profil d'onde correspondant est donné de nouveau par

$$\eta(x) = 2s(x) \cos(Kx) \frac{\tanh \kappa}{K}.$$

Cette solution unique est montrée dans la Fig. 6.4.

Pour  $\mu = 0$ , il existe encore une onde solitaire de dépression, mais qui décroît algébriquement à l'infini, contrairement aux cas précédents où la décroissance était exponentielle (voir Fig. 6.5) :

$$s(x) = \begin{cases} \frac{1}{(|q_2|/2)^{1/2}x - (\sqrt{2|q_2|/\varepsilon})^{1/2}} & \text{pour } x < 0 \\ \frac{-1}{(|q_2|/2)^{1/2}x + (\sqrt{2|q_2|/\varepsilon})^{1/2}} & \text{pour } x > 0. \end{cases}$$

Dans la Fig. 6.6, on montre l'amplitude à l'origine des diverses solutions analytiques qui ont été calculées dans cette partie. En profondeur infinie, la déviation à l'origine pour la solution du problème linéarisé est donnée par

$$\zeta_s(0) = -\frac{P}{\pi\rho} \int_0^\infty \frac{dk}{g + Dk^4/\rho - c^2k}.$$

Les résultats importants de cette section sont l'existence d'une vitesse critique  $c^* < c_{\min}$  pour l'existence des ondes solitaires dans le cas  $q_2 > 0$  et l'existence d'ondes solitaires de dépression pour toutes les vitesses plus petites que  $c_{\min}$ , avec  $c_{\min}$  inclus, pour  $q_2 < 0$ . D'autres solutions bornées pour l'équation de Schrödinger nonlinéaire forcée, en particulier les ondes périodiques et les ondes solitaires noires sont montrées dans l'annexe C.

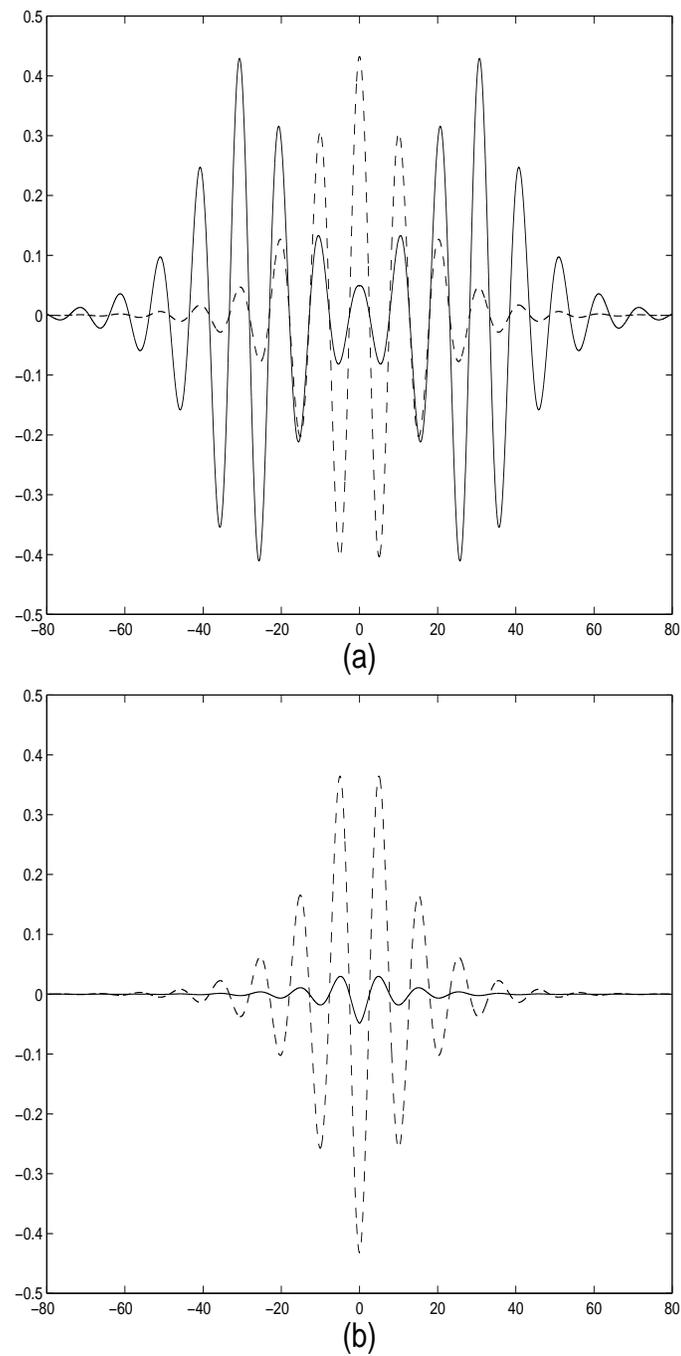


FIG. 6.3 – Profils des ondes correspondantes  $\eta(x)$  dans le cas  $q_2 > 0$  avec  $\varepsilon = 0.003$ ,  $\mu = 0.02$ ,  $\kappa = 2.27$ ; (a) ondes d'élevation, (b) ondes de dépression.

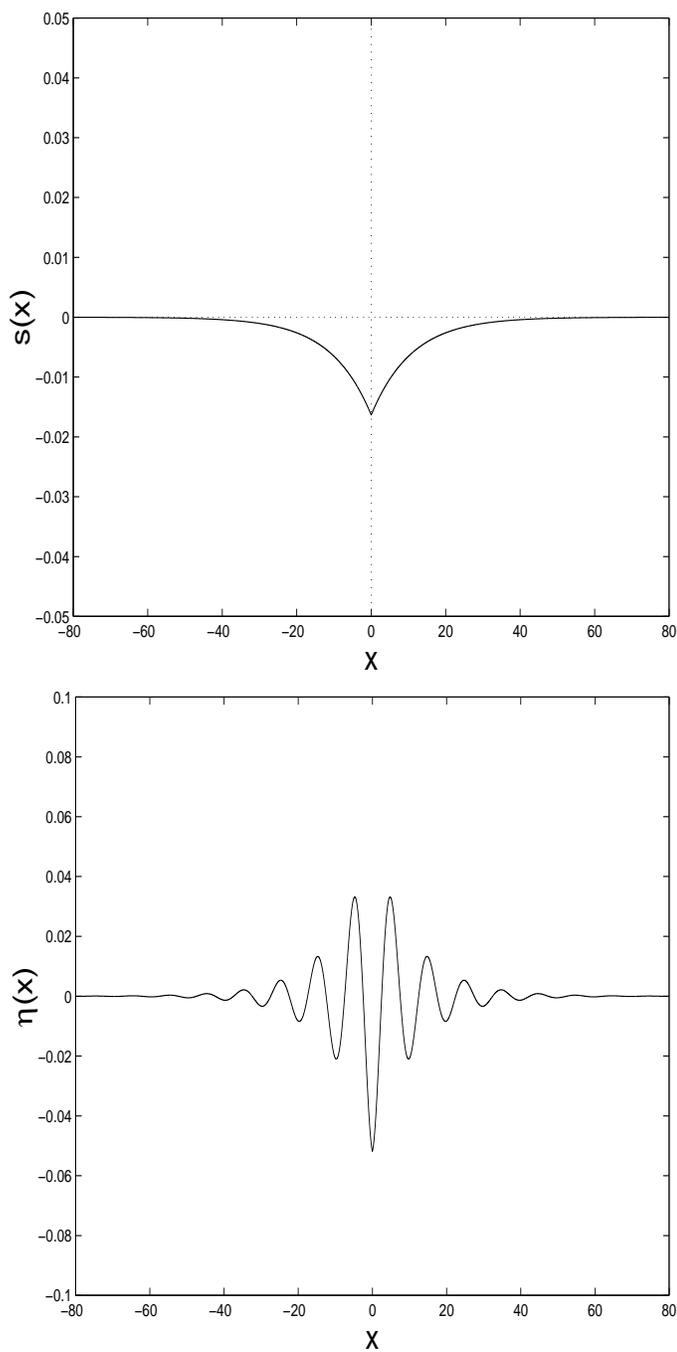


FIG. 6.4 – Le profil de  $s(x)$  (en haut) et le profil correspondant de l'onde  $\eta(x)$  (en bas) dans le cas  $q_2 < 0$  avec  $\varepsilon = 0.003$ ,  $\mu = 0.02$ ,  $\kappa = \infty$  (profondeur infinie).

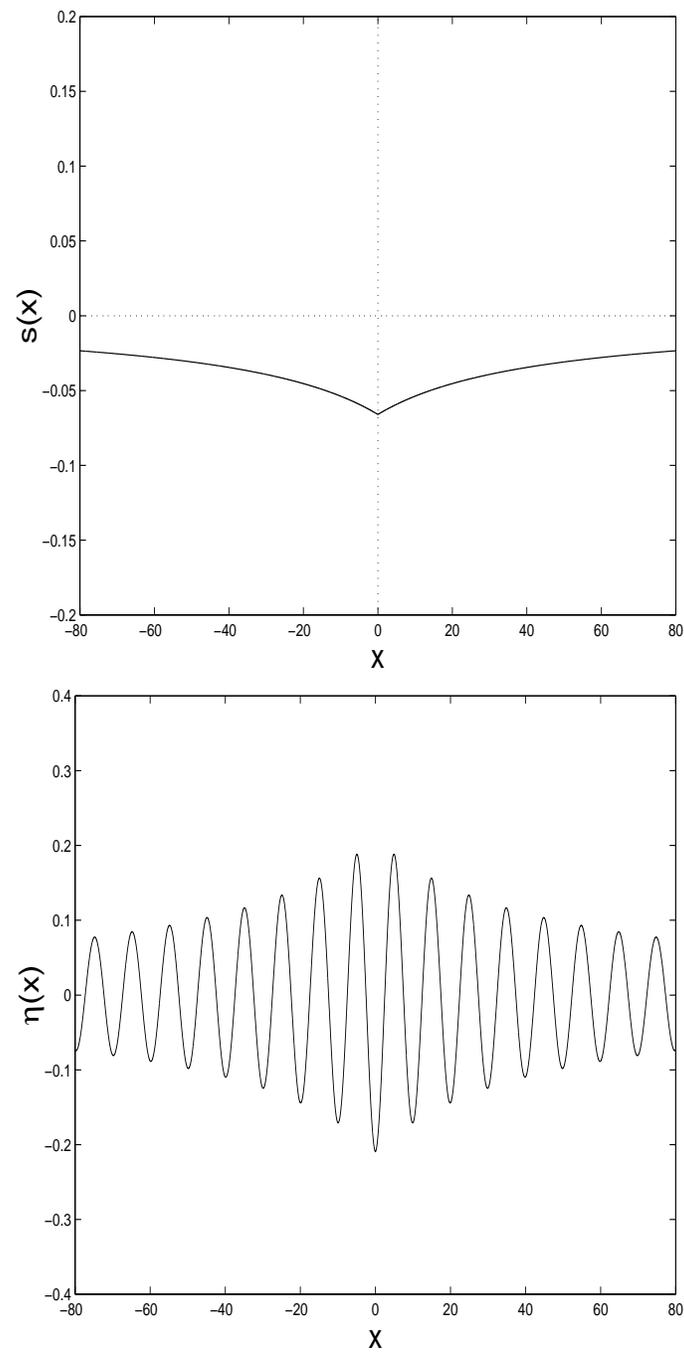


FIG. 6.5 – Le profil de  $s(x)$  (en haut) et le profil correspondant de l'onde  $\eta(x)$  (en bas) dans le cas  $q_2 < 0$  avec  $\varepsilon = 0.003$ ,  $\mu = 0$ ,  $\kappa = \infty$  (profondeur infinie). On peut observer la décroissance algébrique de l'onde à l'infini.

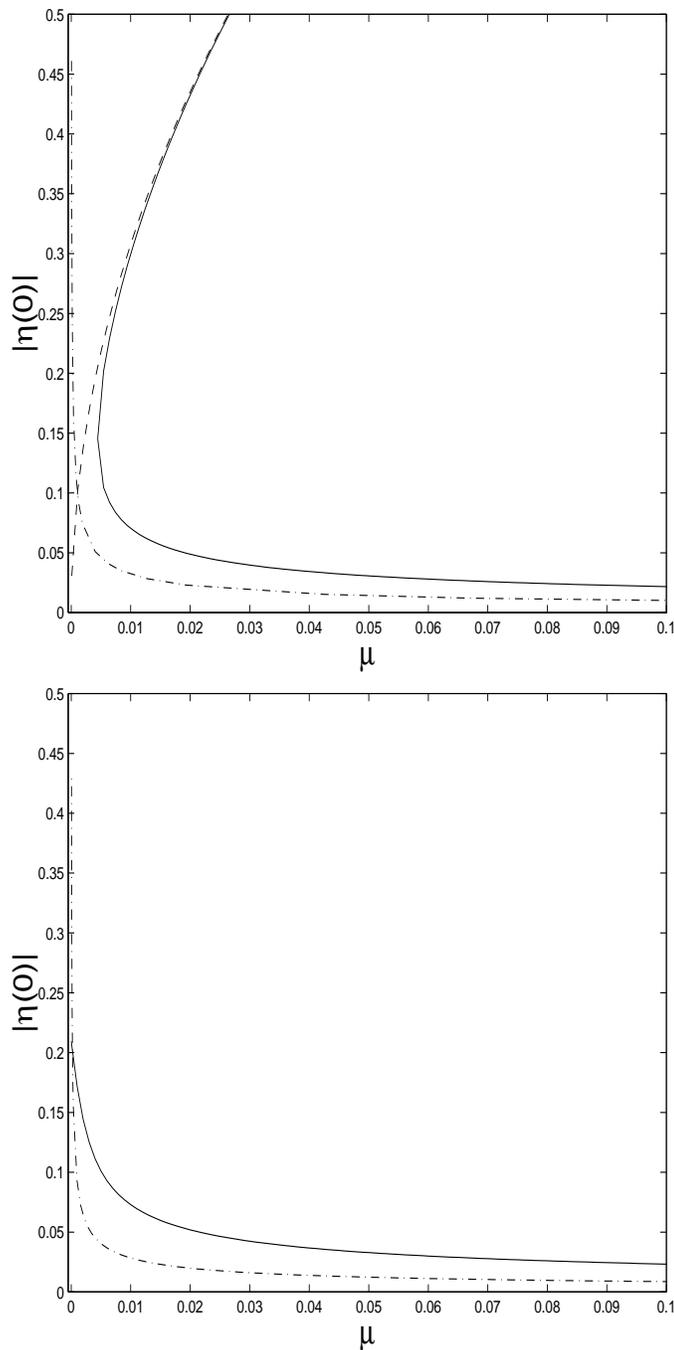


FIG. 6.6 – L'amplitude  $|\eta(0)|$  en fonction de  $\mu$  pour  $q_2 > 0$  (en haut) et  $q_2 < 0$  (en bas). La valeur de  $\kappa$  est 2.27 pour  $q_2 > 0$ , comme dans la Fig. 6.2. La valeur de  $\kappa$  est infinie pour  $q_2 < 0$ , comme dans la Fig. 6.4. Diverses solutions sont montrées : la solution du problème linéarisé ( $\cdot - \cdot - \cdot$ ) avec  $\varepsilon \neq 0$  (voir Ch. 3), la solution analytique avec  $\varepsilon = 0$  ( $--$ ) (voir Ch. 4) et les solutions de l'équation de Schrödinger nonlinéaire forcée avec  $\varepsilon \neq 0$  (trait plein). Quand  $q_2 < 0$  on peut observer que dans la limite  $\mu \rightarrow 0$ ,  $|\eta(0)|$  reste fini. La valeur de  $\varepsilon$  dans ces graphes est 0.003 ou 0.

# Discussion

La comparaison entre la théorie et les expériences est toujours une tâche difficile. Dans le cas de l'eau au-dessous d'une couche de glace, cette tâche est encore plus difficile parce que beaucoup d'effets entrent en jeu comme la modélisation de la glace. Dans notre modèle, le terme de l'accélération de la glace a été négligé. On peut justifier cela par le fait que la longueur d'onde de la déformation de l'interface est beaucoup plus grande que l'épaisseur de la couche de glace. Puisque le mouvement de l'eau pénètre jusqu'à une profondeur comparable à une longueur d'onde, l'inertie de la plaque de glace mince va être petite par rapport à celle de la couche de l'eau. Une autre source d'erreur dans la comparaison est la modélisation de la pression due à la charge. Dans les expériences, le véhicule est bidimensionnel, tandis que notre modèle est unidimensionnel. La viscosité peut jouer aussi un rôle important dans les expériences.

Ces commentaires étant faits, on revient sur les résultats de cette partie. Si les effets non-linéaires sont importants près de  $c_{\min}$ , alors le comportement dépend de la profondeur de l'eau, si on garde les autres paramètres physiques  $D$  et  $H$  constants. Dans les expériences de Takizawa, la profondeur de l'eau est proche de la profondeur critique. Théoriquement, on trouve une région de transition pour des vitesses légèrement inférieures à  $c_{\min}$ , où il n'existe pas de solutions stationnaires sous la forme d'ondes solitaires. Takizawa [28] décrit deux régions de transition pour  $c$  plus petite que  $c_{\min}$ , mais elles sont basées sur le comportement qualitatif de la déformation de la glace. On pense qu'à cause de l'imperfection du modèle décrit ci-dessus, la profondeur de l'eau est proche de celle critique, et que les ondes solitaires peuvent être observées dans toute la région jusqu'à la vitesse critique. Dans l'eau peu profonde, on pourrait observer une région de transition claire, c.-à-d. une région sans solution stationnaire. Dans le cas de la profondeur infinie il n'y a pas de région

de transition et les ondes solitaires existent pour tout  $c$  plus petit que  $c_{\min}$ .

La conclusion dans l'état actuel de nos connaissances est donc que la description des solutions est faite convenablement par l'équation de Schrödinger nonlinéaire forcée pour les vitesses  $c$  proches de  $c_{\min}$ , tandis que pour  $c \ll c_{\min}$  la linéarisation est assez bonne.

On revient maintenant à l'effet de la viscosité, qui peut également expliquer pourquoi la déformation de la couche de glace ne va pas à l'infini quand  $c$  s'approche de  $c_{\min}$ . Richard et Raphaël [23] dans le contexte des ondes de capillarité-gravité et Takizawa [28] dans le contexte des ondes de flexion-gravité pour la glace ont étudié l'effet de la viscosité dans le problème linéarisé. Ils ont trouvé que la déformation de l'interface devient finie pour  $c = c_{\min}$ .

Barnard et al. [3] ont étudié les ondes de surface proches d'une fréquence seuil. Ils ont considéré un canal ouvert de profondeur uniforme dans lequel des ondes étaient engendrées par un générateur de vagues installé à une extrémité. Leur but était de prédire la réponse quand le générateur de vagues est conduit à une fréquence proche de la fréquence seuil. La théorie linéaire non visqueuse indiquait que l'amplitude des ondes était infinie pour la fréquence seuil, ce qui évidemment n'était pas le cas dans les expériences. Donc, parce que les solutions linéarisées n'étaient pas appropriées pour décrire les résultats expérimentaux, ils ont considéré les effets des termes faiblement nonlinéaires et ont dérivé une équation de Schrödinger nonlinéaire. Soit dit en passant, leur figure 2(b) n'est pas entièrement correcte. Quand  $p$  est positif ( $p$  est l'équivalent de notre  $-\mu$ ), la solution ne peut pas décroître vers zéro. Donc le trait en tirets doit être ôté pour  $p$  positif. Alors ils ont introduit les effets de dissipation. Leur conclusion a été que le modèle sans viscosité n'était pas assez bon. La même conclusion pourrait être tirée pour les expériences sur la glace.

# Bibliographie

- [1] T. Akylas (1984), On the excitation of nonlinear water waves by a moving pressure distribution oscillating at resonant frequency, *Phys. Fluids* **27**, 2803-2807.
- [2] G. D. Ashton (1986), *River and Lake Ice Engineering*, Water Resources Publications, Littleton, Colorado.
- [3] B. J. S. Barnard, J. J. Mahony, W. G. Pritchard (1977), The excitation of surface waves near a cut-off frequency, *Phil. Trans. R. Soc. London A* **286**, 87-123.
- [4] F. Dias, G. Iooss (1993), Capillary-gravity solitary waves with damped oscillations, *Physica D* **65**, 399-423.
- [5] F. Dias, G. Iooss (1996), Capillary-gravity interfacial waves in infinite depth, *Eur. J. Mech., B/Fluids*, **15**, 367-393.
- [6] F. Dias, D. Menasce, J.-M. Vanden-Broeck (1996), Numerical study of capillary-gravity solitary waves, *Europ. J. Mech. B/Fluids* **15**, 17-36.
- [7] F. Dias, C. Kharif (1999), Nonlinear gravity and capillary-gravity waves, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **31**, 301-346.
- [8] D. Eyre (1977), The flexural motion of a floating ice sheet induced by moving vehicles, *J. Glaciology* **19**, 555-570.
- [9] L. K. Forbes (1986), Surface waves of large amplitude beneath an elastic sheet. Part 1. High-order series solution, *J. Fluid Mech.* **169**, 409-428.
- [10] L. K. Forbes (1988), Surface waves of large amplitude beneath an elastic sheet. Part 2. Galerkin solution, *J. Fluid Mech.* **188**, 491-508.

- [11] A. Il'ichev, K. Kirchgässner (1998), Nonlinear water waves beneath an elastic ice-sheet, Preprint Stuttgart University, Bericht 98/19, Sonderforschungsbereich 404, 27 p.
- [12] G. Iooss, M. Adelmeyer (1992), *Topics in Bifurcation Theory and Applications*, Advanced Series in Nonlinear Dynamics vol. 3, World Scientific, Singapore.
- [13] G. Iooss, K. Kirchgässner (1992), Water waves for small surface tension : an approach via normal form, *Proc. R. Soc. Edinburgh A* **122**, 267-299.
- [14] G. Iooss, M.-C. Pérouème (1993), Perturbed homoclinic solutions in reversible 1 :1 resonance fields, *J. Diff. Eq.* **102**, 62-88.
- [15] J. B. Keller (1998), Gravity waves on ice-covered water, *J. Geophys. Res.* **103**, No. C4, 7663-7669.
- [16] K. Kirchgässner (1988), Nonlinearly resonant surface waves and homoclinic bifurcation, *Adv. Applied Mech.* **26**, 135-181.
- [17] O. Laget, F. Dias (1997), Numerical computation of capillary-gravity interfacial solitary waves, *J. Fluid Mech.* **349**, 221-251.
- [18] A. Mielke (1986), Steady flows of inviscid fluids under localized perturbations, *J. Diff. Eq.* **65**, 89-116.
- [19] F. Milinazzo, M. Shinbrot, N. W. Evans (1995), A mathematical analysis of the steady response of floating ice to the uniform motion of a rectangular load, *J. Fluid Mech.* **287**, 173-197.
- [20] A. Müller, R. Ettema (1984), Dynamic response of an icebreaker hull to ice breaking. In *Proc. IAHR ICE Symp.*, Hamburg, **II**, 287-296.
- [21] E. Părău, F. Dias, Ondes solitaires forcées de capillarité-gravité, to appear in *C. R. Acad. Sci. Paris*, 2000.
- [22] E. Părău, F. Dias, Solitary waves beneath an ice sheet, Preprint de C.M.L.A., E.N.S. Cachan, 2000.
- [23] D. Richard, E. Raphaël (1999), Capillary-gravity waves : The effects of viscosity on the wave resistance, *Europhys. Lett.*, **48**, 49-52.
- [24] R. M. S. M. Schulkes, A. D. Sneyd (1988), Time-dependent response of floating ice to a steadily moving load, *J. Fluid Mech.* **186**, 25-46.

- [25] V. A. Squire, R. J. Hosking, A. D. Kerr, P. J. Langhorne (1996), *Moving loads on ice plates*, Solid Mechanics and its Applications **45**, Kluwer Academic Publishers.
- [26] T. Takizawa (1985), Deflection of a floating sea ice sheet induced by a moving load, *Cold Regions Science and Technology* **11**, 171-180.
- [27] T. Takizawa (1987), Field studies on response of a floating sea ice sheet to a steadily moving load, *Contributions from the Institute of Low Temperature Science A* **36**, 31-76.
- [28] T. Takizawa (1988), Response of a floating sea ice sheet to a steadily moving load, *J. Geophysical Research* **93**, 5100-5112.
- [29] J.-M. Vanden-Broeck, F. Dias (1992), Gravity–capillary solitary waves in water of infinite depth and related free-surface flows, *J. Fluid Mech.* **240**, 549-557.



# Annexe A

## Estimation de la résolvante

**Lemme.** *Etant donné  $L$ , on considère la complexification naturelle  $\hat{L}$  dans  $\hat{X} = X + iX, \hat{Y} = Y + iY$ . Pour chaque  $(\lambda, f) \in \mathbb{R}_+^{*2}$  il existe une constante  $k_0 > 0$  telle que tout  $z = ik, k \in \mathbb{R}, |k| \geq k_0$  appartient à l'ensemble résolvant de  $\hat{L}$ . De plus, on a les inégalités suivantes pour un  $C > 0$ , indépendant de  $z = ik, k \in \mathbb{R}, |k| \geq k_0$*

$$\begin{aligned} (i) \quad & \|(\hat{L} - z)^{-1}\|_{\hat{X} \rightarrow \hat{X}} \leq C; \\ (ii) \quad & \|(\hat{L} - z)^{-1}\|_{\hat{Y} \rightarrow \hat{X}} \leq \frac{C}{k}; \\ (iii) \quad & \|(\hat{L} - z)^{-2}\|_{\hat{Y} \rightarrow \hat{X}} \leq \frac{C}{k^2}. \end{aligned}$$

**Démonstration :** On a vu que le spectre de l'opérateur  $L$  contient uniquement des valeurs propres isolées de multiplicité finie. De plus, on peut avoir au maximum quatre valeurs sur l'axe imaginaire, donc on trouve une constante  $k_0 > 0$  telle que tout  $z = ik, k \in \mathbb{R}, |k| \geq k_0$  appartient à l'ensemble résolvant de  $L$ . Donc l'opérateur linéaire  $(\hat{L} - ik)^{-1}$  existe pour  $|k| \geq k_0$ .

L'équation  $(\hat{L} - ik)^{-1}\mathbf{v} = \mathbf{w}$ , où  $\mathbf{w} = (\alpha, \beta, \gamma, w_1, w_2) \in D(L)$ ,  $\mathbf{v} = (a, b, g, v_1, v_2) \in X$ , s'écrit

$$\beta - ik\alpha = a \tag{A.1}$$

$$\gamma - ik\beta = b \tag{A.2}$$

$$-w_1(0) + \lambda[w_1] - ik\gamma = g \tag{A.3}$$

$$-w_{2\psi} - ikw_1 = v_1 \tag{A.4}$$

$$w_{1\psi} - ikw_2 = v_2 \tag{A.5}$$

et, pour montrer (i) il faut que l'on trouve l'estimation suivante

$$\|w\|_{\hat{X}} \leq C\|v\|_{\hat{X}}. \quad (\text{A.6})$$

Compte-tenu que  $w_2(0) = \alpha$ , les équations (A.1) et (A.2) nous donnent  $\beta = a + ikw_2(0)$  et  $\gamma = b + ika - k^2w_2(0)$ . En remplaçant  $\gamma$  dans l'équation (A.3), elle devient

$$w_1(0) - \lambda[w_1] - ik^3w_2(0) = -g - bik + k^2a \quad (\text{A.7})$$

On multiplie les équations (A.4) et (A.5) par leurs conjuguées, on les intègre sur  $(-\frac{\lambda}{f}, 0)$  et on les additionne, en utilisant  $w_2(-\frac{\lambda}{f}) = 0$  :

$$|w_{1\psi}|_0^2 + |w_{2\psi}|_0^2 + k^2(|w_1|_0^2 + |w_2|_0^2) - 2k\text{Im}(w_1(0)\overline{w_2(0)}) = |v_1|_0^2 + |v_2|_0^2 \quad (\text{A.8})$$

où  $|\cdot|_0$  est la  $L_2$ -norme sur  $(-\frac{\lambda}{f}, 0)$ . En multipliant l'équation (A.7) par  $\overline{w_1(0)}$  et en utilisant l'équation (A.4) on a

$$i\left(\frac{f}{k} + k^3\right)\overline{w_1(0)}w_2(0) = |w_1(0)|^2 - i\frac{\lambda}{k}[v_1]\overline{w_1(0)} - (-g - bik + k^2a)\overline{w_1(0)}. \quad (\text{A.9})$$

Si l'on utilise l'inégalité géométrique  $t_1t_2 \leq \varepsilon^2t_1^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2}t_2^2$  pour  $\forall t_1, t_2, \varepsilon > 0$  et les inégalités de Cauchy-Hölder, on trouve

$$k|\text{Im}(w_1(0)\overline{w_2(0)})| \leq \frac{1}{f/k^2 + k^2}\{(1+4\varepsilon^2)|w_1(0)|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2}\left(\frac{f^2}{k^2}|v_1|_0^2 + k^4a^2 + k^2b^2 + g^2\right)\} \quad (\text{A.10})$$

pour chaque  $\varepsilon > 0$ . Pour estimer  $|w_1(0)|$ , on multiplie l'équation (A.5) par  $(\psi + \frac{\lambda}{f})^n$ , pour chaque  $n \in \mathbb{N}$  et on intègre sur  $(-\frac{\lambda}{f}, 0)$ . On utilise de nouveau une inégalité géométrique et les inégalités de Cauchy-Hölder. L'estimation suivante est trouvée :

$$|w_1(0)|^2 \leq \frac{3n^2}{2n-1}\frac{f}{\lambda}|w_1|_0^2 + \frac{3k^2}{2n+1}\frac{\lambda}{f}|w_2|_0^2 + \frac{3}{2n+1}\frac{\lambda}{f}|v_2|_0^2 \quad (\text{A.11})$$

On peut choisir  $n$  et  $\varepsilon$  tels que

$$\frac{6(1+4\varepsilon^2)\lambda}{2n+1}\frac{\lambda}{f} = \frac{1}{2}$$

Alors, en utilisant les dernières relations, l'inégalité (A.10) peut être réécrite sous la forme

$$\begin{aligned} 2k|\text{Im}(w_1(0)\overline{w_2(0)})| &\leq \frac{1}{f/k^2 + k^2}\left\{\frac{f^2}{\lambda^2}\frac{n^2(2n+1)}{2(2n-1)}|w_1|_0^2 + \frac{k^2}{2}|w_2|_0^2 + \frac{1}{2}|v_2|_0^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\varepsilon^2}\left(\frac{f^2}{k^2}|v_1|_0^2 + k^4|a|^2 + k^2|b|^2 + |g|^2\right)\right\} \end{aligned}$$

Grace à cette dernière inégalité et compte-tenu que  $\frac{1}{f/k^2+k^2} \leq \frac{1}{k^2}$ , on estime le terme qui contient  $2k\text{Im}(w_1(0)\overline{w_2(0)})$  dans l'équation (A.8) :

$$\begin{aligned} |w_{1\psi}|_0^2 + |w_{2\psi}|_0^2 + \left(k^2 - \frac{f^2 n^2(2n+1)}{\lambda^2 2k^2(2n-1)}\right) |w_1|_0^2 + \left(k^2 - \frac{1}{2}\right) |w_2|_0^2 &\leq |v_1|_0^2 + |v_2|_0^2 + \frac{1}{2k^2} |v_2|_0^2 + \\ &+ \frac{f^2}{2\varepsilon^2 k^4} |v_1|_0^2 + \frac{k^2}{2\varepsilon^2} |a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2} |b|^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2 k^2} |g|^2. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

On observe donc que si  $k_0$  est choisi suffisamment grand, il y a une constante  $C_1$  telle qu'on a l'estimation  $|w_1|_0^2 \leq C_1^2 \|\mathbf{v}\|_X$ ,  $|w_2|_0^2 \leq C_1^2 \|\mathbf{v}\|_X$ . On a aussi besoin des estimations de  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$ . Pour  $\gamma$  on fait l'estimation dans l'équation (A.3) :

$$|\gamma| \leq \frac{1}{k} (|w_1(0)| + \lambda |w_1| + |g|)$$

et, en utilisant (A.11) pour  $|w_1(0)|$  et les estimations pour  $|w_1|_0$  et  $|w_2|_0$  on obtient

$$|\gamma| \leq C_2 \|\mathbf{v}\|_X$$

Maintenant, on obtient des estimations  $|\beta| \leq \frac{C_3}{k} \|\mathbf{v}\|_X$  dans l'équation (A.2) et  $|\alpha| \leq \frac{C_4}{k} \|\mathbf{v}\|_X$ . On peut donc dire qu'il y a une constante  $C$  telle que l'estimation (A.6) est correcte.

Pour montrer (ii) on prend  $\mathbf{v} \in Y$ , c'est-à-dire  $a$  et  $b$  sont nuls. La norme  $\|\cdot\|_Y$  est la norme induite dans le sous-espace  $Y \subset X$  de  $\|\cdot\|_X$ . Dans ce cas, en regardant (A.12) on observe que le terme  $\frac{k^2}{2\varepsilon^2} |a|^2$  s'annule. De plus, l'estimation pour  $\gamma$  nous donne  $|\gamma| \leq \frac{C'_2}{k} \|\mathbf{v}\|_Y$  et, par conséquent  $|\beta| \leq \frac{C'_2}{k^2} \|\mathbf{v}\|_Y$ ,  $|\alpha| \leq \frac{C'_2}{k^3} \|\mathbf{v}\|_Y$  et on arrive à la conclusion

$$\|\mathbf{w}\|_X \leq \frac{C}{k} \|\mathbf{v}\|_Y$$

Pour le dernier point (iii) on applique deux fois l'opérateur  $(\hat{L} - ik)^{-1}$ . On note  $(\hat{L} - ik)^{-1} \mathbf{v} = \mathbf{v}'$  et  $(\hat{L} - ik)^{-1} \mathbf{v}' = \mathbf{w}$  où  $\mathbf{v} \in Y$ ,  $\mathbf{w}, \mathbf{v}' \in X$ . En appliquant (ii) on a  $\|\mathbf{v}'\|_X \leq \frac{C}{k} \|\mathbf{v}\|_Y$  et, en plus,  $|g'| \leq \frac{C}{k} \|\mathbf{v}\|_Y$ ,  $|b'| \leq \frac{C}{k^2} \|\mathbf{v}\|_Y$ ,  $|a'| \leq \frac{C}{k^3} \|\mathbf{v}\|_Y$ . On refait la démonstration pour (i) en tenant compte de ces inégalités appliquées dans l'équation (A.12) et on obtient rapidement

$$\|\mathbf{w}\|_X \leq \frac{C}{k^2} \|\mathbf{v}\|_Y.$$



# Annexe B

## Compléments numériques

On peut introduire la pression due à la charge dans l'équation de Bernoulli, en suivant [29]. L'équation (5.1.5) devient

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{x'^2 + \eta'^2} - 1 \right) + f\eta + \frac{S}{x'^3(x'^2 + \eta'^2)^{7/2}} + \varepsilon P(\phi) = 0, \quad (\text{B.1})$$

où  $\varepsilon > 0$  et la distribution de la pression peut être choisie sous la forme

$$P(\phi) = \begin{cases} e^{\frac{\phi^2}{\phi^2-1}}, & |\phi| \leq 1 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

La même méthode numérique a été utilisée pour résoudre cette équation.

On a observé des solutions perturbées avec la pression dans le voisinage de toutes les solutions numériques trouvées auparavant. D'autres solutions ont été trouvées dans le cas  $\varepsilon \neq 0$  avec des amplitudes beaucoup plus petites, en prenant comme conditions initiales des solutions du problème linéaire. L'amplitude  $|\eta(0)|$  dans ce cas est directement proportionnelle à la valeur de  $\varepsilon$ .

On montre ici quelques profils des ondes solitaires  $\eta(x)$  obtenues avec  $\varepsilon = 0.01$ . On peut voir des ondes d'élévation et aussi de dépression, contrairement aux expériences physiques où uniquement les ondes de dépression ont été observées.

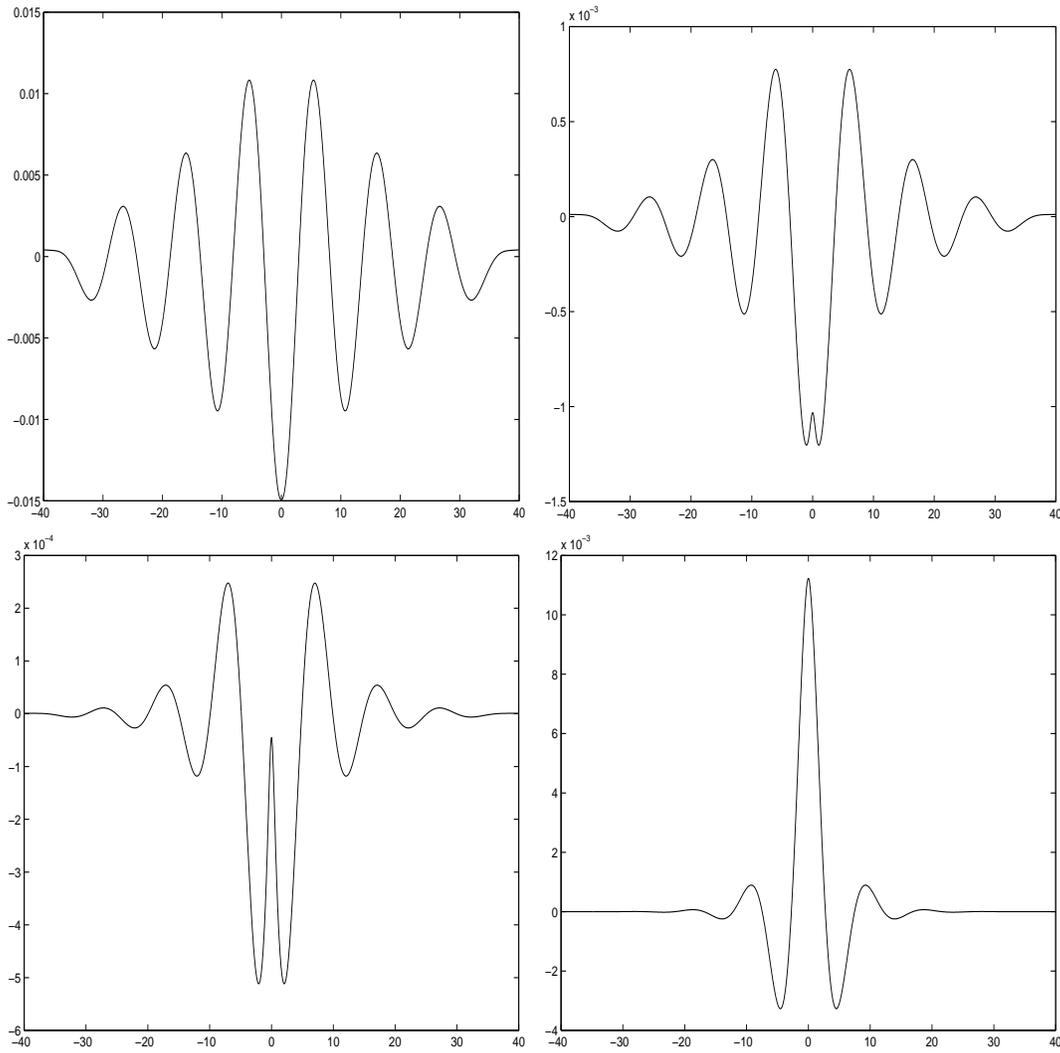


FIG. B.1 – Les profils  $\eta(x)$  dans le cas  $\varepsilon = 0.01$  avec  $f = 0.4894$ ,  $\lambda = 1.814$ ,  $\mu = 0.004$  (en haut, à gauche),  $f = 0.5045$ ,  $\lambda = 1.87$ ,  $\mu = 0.019$  (en haut, à droite),  $f = 0.5396$ ,  $\lambda = 2.00$ ,  $\mu = 0.054$  (en bas, à gauche),  $f = 0.6772$ ,  $\lambda = 2.51$ ,  $\mu = 0.192$  (en bas, à droite). Pour toutes ces ondes,  $f/\lambda \approx 0.27$ . Pour le premier graphe,  $L = 1.84$  et la valeur physique de l'amplitude est  $\zeta(0) = 2.7\text{cm}$  qui est proche de la valeur obtenue dans les expériences. Quand on s'éloigne de la courbe  $\Gamma$  on observe une crête qui apparaît dans le creux et qui devient de plus en plus grande. Finalement, l'onde devient une onde d'élevation qui n'était pas observée dans les expériences.

# Annexe C

## Solutions bornées pour l'équation de Schrödinger nonlinéaire forcée

### C.1 Ondes périodiques

Les paramètres  $q_1$  et  $\varepsilon$  sont supposés positifs dans cette Section. On cherche des solutions périodiques de (6.1.10), c'est-à-dire telle que  $s(x) = s(0) \neq 0$  sur  $\mathbb{R}$  et  $\theta_x$  constant sur  $\mathbb{R}^+$  et  $\mathbb{R}^-$ . Le fait que  $s$  soit constant nous assure que  $s_x = 0$ , donc la condition (6.2.13) nous donne  $\cos \theta(0) = 0$ . On choisit  $\theta(0) = \pi/2$ , le cas  $\theta(0) = -\pi/2$  étant similaire. Dans les deux cas  $A(0) = 0$ .

La deuxième condition dans (6.2.13) devient

$$s(0)(\theta_x(0+) - \theta_x(0-)) = -\varepsilon. \quad (\text{C.1})$$

On note  $\theta_x = \begin{cases} C_1, & \text{pour } x < 0 \\ C_2, & \text{pour } x \geq 0 \end{cases}$  avec  $C_1, C_2$  constants. Donc, en utilisant la continuité de  $\theta$ ,  $\theta(x) = \begin{cases} C_1x + \pi/2, & \text{pour } x < 0 \\ C_2x + \pi/2, & \text{pour } x \geq 0 \end{cases}$ .

L'équation (6.2.11) devient

$$q_2s(0)^3 - q_1\mu s(0) - s(0)C_1^2 = 0, \quad x < 0 \quad (\text{C.2})$$

$$q_2s(0)^3 - q_1\mu s(0) - s(0)C_2^2 = 0, \quad x \geq 0. \quad (\text{C.3})$$

Donc  $C_1^2 = C_2^2$  et, à l'aide de (C.1), on obtient  $C_2 = -C_1 = -\frac{\varepsilon}{2s(0)}$ . En remplaçant les constantes  $C_1, C_2$  dans (C.3) on trouve l'équation suivante pour  $s(0)$  :

$$q_2s(0)^4 - q_1\mu s(0)^2 - \frac{\varepsilon^2}{4} = 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{C.4})$$

Une étude de cette équation en fonction des signes des coefficients  $\mu$  et  $q_2$  donne les cas suivants :

(i) pour  $q_2 > 0, \mu \in \mathbb{R}$  il y a deux solutions  $s(0) = \pm \sqrt{\frac{q_1\mu + \sqrt{q_1^2\mu^2 + q_2\varepsilon^2}}{2q_2}}$  ;

(ii) pour  $q_2 < 0, \mu < 0$  il y a quatre solutions  $s(0) = \pm \sqrt{\frac{q_1\mu \pm \sqrt{q_1^2\mu^2 + q_2\varepsilon^2}}{2q_2}}$  si  $\mu < -\sqrt{\frac{|q_2|}{q_1}}\varepsilon$ , deux solutions  $s(0) = \pm \sqrt{\frac{q_1\mu}{2q_2}}$  si  $\mu = -\sqrt{\frac{|q_2|}{q_1}}\varepsilon$  et aucune solution si  $-\sqrt{\frac{|q_2|}{q_1}}\varepsilon < \mu < 0$ . On montre dans la Fig.C.1 le profil de  $|s(0)|$  en fonction de  $\mu$  dans les cas  $q_2 > 0$  et  $q_2 < 0$ . Les solutions ci-dessus correspondent aux solutions périodiques

$$A(x) = \begin{cases} s(0)e^{i(\frac{\varepsilon}{2s(0)}x + \pi/2)}, & x < 0 \\ s(0)e^{i(-\frac{\varepsilon}{2s(0)}x + \pi/2)}, & x \geq 0 \end{cases}$$

de l'équation (6.1.10).

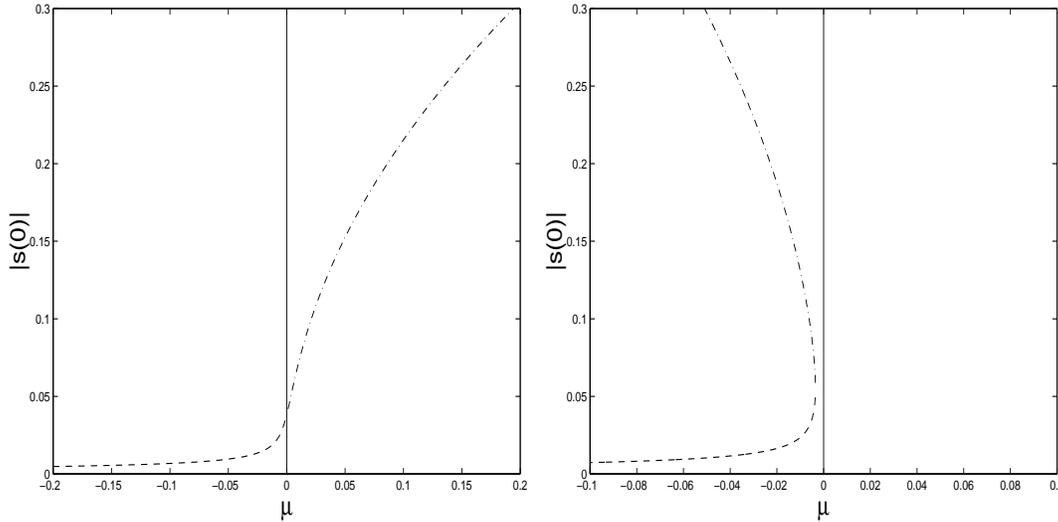


FIG. C.1 – L'amplitude  $|s(0)|$  en fonction de  $\mu$  pour  $q_2 > 0$  (à gauche) et  $q_2 < 0$  (à droite). Les valeurs de  $q_1$ ,  $q_2$  et  $\varepsilon$  sont les mêmes que dans la Fig. 6.6. Les solutions en tirets sont des perturbations de la solution du problème linéarisé. Les solutions en tirets-pointillés ont des amplitudes trop grandes pour qu'elles soient acceptables physiquement.

## C.2 Ondes “périodiques-solitaires”

Un autre type de solutions bornées sont les ondes périodiques sur  $\mathbb{R}^-$  ( $\mathbb{R}^+$ ) et solitaires sur  $\mathbb{R}^+$  ( $\mathbb{R}^-$ ). On étudie le cas où l'onde est périodique sur  $\mathbb{R}^-$  et converge vers 0 sur  $\mathbb{R}^+$ ,

l'autre cas étant similaire. Donc  $s$  et  $\theta_x$  sont constants pour  $x \in \mathbb{R}^-$ . Les conditions aux limites en 0 deviennent

$$s_x(0+) = \varepsilon \cos \theta(0), \quad s(0)\theta_x(0-) = \varepsilon \sin \theta(0).$$

Si l'on note  $\theta_x = C$  pour  $x < 0$  avec  $C$  constante et l'on suit la méthode utilisée ci-dessus pour trouver des ondes périodiques, la relation suivante doit être satisfaite

$$q_2 s(0)^2 - q_1 \mu - C^2 = 0. \quad (\text{C.5})$$

Il est évident que des solutions peuvent être trouvées uniquement dans les cas  $q_2 > 0, \mu \in \mathbb{R}$  ou  $q_2 < 0, \mu < 0$ . La condition de décroissance vers 0 de  $s$  et de ses dérivées pour  $x \rightarrow \infty$  donne, en suivant la Sec. 6.2.1, le système suivant

$$\begin{cases} \frac{1}{4}u_x^2 = q_1 \mu u^2 - \frac{q_2}{2}u^3, \\ u\theta_x = 0 \end{cases}, \quad x > 0 \quad (\text{C.6})$$

où  $u = s^2$ . Des orbites homoclines à zéro existent quand  $q_2 > 0, \mu > 0$  et  $q_2 < 0, \mu \geq 0$ . Donc pour assurer l'existence des solutions sur  $\mathbb{R}$  on suppose  $q_2 > 0, \mu > 0$ . On observe que  $\theta$  est constant pour  $x > 0$ . En notant  $s(0) = s_0, \theta(0) = \theta_0$  et en utilisant l'équation (C.6) les conditions aux limites impliquent

$$q_1 \mu s_0^2 - \frac{q_2}{2} s_0^4 = \varepsilon^2 \cos^2 \theta_0, \quad s_0^2 C^2 = \varepsilon^2 \sin^2 \theta_0.$$

En remplaçant  $C$  dans l'équation (C.5) on obtient

$$s_0^2 = \sqrt{\frac{2}{q_2}} \varepsilon$$

et une condition nécessaire

$$\mu^* \leq \mu \leq 2\mu^*$$

où  $\mu^*$  est le même que dans la section précédente ( $\mu^* = \frac{1}{q_1} \sqrt{\frac{q_2}{2}} \varepsilon$ ). Les solutions du problème peuvent être mises sous la forme  $A(x) = s(x)e^{i\theta(x)}$  où

$$s(x) = \begin{cases} s_0, & x < 0 \\ \pm \sqrt{\frac{2q_1\mu}{q_2}} / \cosh(\sqrt{q_1\mu}x - \alpha), & x \geq 0 \end{cases}, \quad \theta(x) = \begin{cases} Cx + \theta_0, & x < 0 \\ \theta_0, & x \geq 0 \end{cases}$$

où  $C^2 = q_1(2\mu^* - \mu)$ ,  $s_0 = \pm \sqrt{\frac{2}{q_2}} \varepsilon$ ,  $\sin \theta_0 = \frac{s_0 C}{\varepsilon}$  et  $\alpha$  vérifie  $\cosh^2 \alpha = \mu/\mu^*$ . Pour le cas  $\theta_0 = 0$  on montre dans la Fig C.2 les profils de deux ondes ainsi obtenues.

### C.3 Ondes solitaires noires

On cherche des solutions homoclines à la même solution périodique, donc on suppose  $I_1 = I_2 = I$  et  $H_1 = H_2 = H$ . Ces conditions sont satisfaites si  $\theta(0) = 0$  et  $s_x(0+) = -s_x(0-) = \frac{\varepsilon}{2}$ . Le système à étudier est

$$\begin{cases} \frac{1}{4}u_x^2 = q_1\mu u^2 - \frac{q_2}{2}u^3 - I^2 + Hu, & u\theta_x = I, & x \neq 0 \\ u_x(0+) = -u_x(0-) = \varepsilon s(0) \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

où  $u = s^2$ . Quand  $q_2 < 0$  et  $\mu < 0$  il existe des ondes solitaires noires si la fonction  $f(u)$  a une racine double positive  $a$ , l'autre racine positive  $b$  étant plus petite que  $a$ . En écrivant  $f(u) = -\frac{q_2}{2}(u-a)^2(u-b)$  on obtient

$$b = 2\frac{q_1\mu}{q_2} - 2a, \quad H = \frac{3}{2}q_2a^2 - 2q_1\mu a, \quad I^2 = q_2a^3 - q_1\mu a^2$$

avec la condition  $\frac{2}{3}\frac{q_1\mu}{q_2} \leq a \leq \frac{q_1\mu}{q_2}$ . En suivant la méthode utilisée dans [17], l'intégration de (C.7) fournit l'enveloppe des ondes solitaires noires :

$$s(x) = \begin{cases} \pm \left[ b + (a-b) \tanh^2 \left( x \left( \frac{(a-b)|q_2|}{2} \right)^{1/2} \mp \alpha_{1/2} \right) \right]^{1/2}, & x < 0 \\ \pm \left[ b + (a-b) \tanh^2 \left( x \left( \frac{(a-b)|q_2|}{2} \right)^{1/2} \pm \alpha_{1/2} \right) \right]^{1/2}, & x > 0 \end{cases} \quad (\text{C.8})$$

où  $\alpha_{1/2}$  sont les solutions positives d'une équation en  $\tanh^2 \alpha$  et  $\varepsilon$ , obtenue à l'aide de la condition aux limites pour la dérivée. Comme dans la Section 6.2.1, il n'existe pas toujours des solutions qui remplissent cette condition.  $\theta(x)$  peut être obtenu en intégrant l'équation  $u\theta_x = I$ . Une autre solution homocline à la même solution périodique (dans le cas de dépression) est

$$s(x) = \begin{cases} - \left[ b + (a-b) \coth^2 \left( x \left( \frac{(a-b)|q_2|}{2} \right)^{1/2} - \alpha_0 \right) \right]^{1/2}, & x < 0 \\ - \left[ b + (a-b) \coth^2 \left( x \left( \frac{(a-b)|q_2|}{2} \right)^{1/2} + \alpha_0 \right) \right]^{1/2}, & x > 0 \end{cases} \quad (\text{C.9})$$

où  $\alpha_0$  est la solution positive d'une équation en  $\coth^2 \alpha$ . Par rapport à l'équation de Schrödinger nonlinéaire il y a donc plusieurs ondes solitaires noires (voir Fig. C.3).

Dans le cas limite  $b = 0$ ,  $a = \frac{q_1\mu}{q_2}$  les expressions pour l'enveloppe  $s$  deviennent :

$$s(x) = \begin{cases} \pm \sqrt{\frac{q_1\mu}{q_2}} \tanh \left( |x \sqrt{\frac{-q_1\mu}{2}} \mp \alpha \right), & x < 0 \\ \pm \sqrt{\frac{q_1\mu}{q_2}} \tanh \left( |x \sqrt{\frac{-q_1\mu}{2}} \pm \alpha \right), & x > 0 \end{cases} \quad (\text{C.10})$$

l'équation pour  $\alpha$  étant

$$\sqrt{\frac{2}{|q_2|}} q_1(-\mu)(1 - \tanh^2 \alpha) = \varepsilon$$

et

$$s(x) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{q_1\mu}{q_2}} \coth\left(-x\sqrt{\frac{-q_1\mu}{2}} + \alpha_0\right), & x < 0 \\ -\sqrt{\frac{q_1\mu}{q_2}} \coth\left(x\sqrt{\frac{-q_1\mu}{2}} + \alpha_0\right), & x > 0, \end{cases} \quad (\text{C.11})$$

cette fois l'équation pour  $\alpha_0$  étant

$$\sqrt{\frac{2}{|q_2|}} q_1\mu(1 - \coth^2 \alpha) = \varepsilon.$$

Dans l'autre cas limite, quand  $a = b = \frac{2}{3} \frac{q_1\mu}{q_2}$  est une racine triple il existe une onde solitaire noire avec le comportement algébrique à l'infini, qui n'est pas le cas pour l'équation de Schrödinger nonlinéaire simple. La solution est

$$s(x) = \begin{cases} -\left(\frac{2}{|q_2|} \frac{1}{(x-C)^2} + \frac{2}{3} \frac{q_1\mu}{q_2}\right)^{1/2}, & x < 0 \\ -\left(\frac{2}{|q_2|} \frac{1}{(x+C)^2} + \frac{2}{3} \frac{q_1\mu}{q_2}\right)^{1/2}, & x > 0, \end{cases}$$

où  $C$  est la racine positive de  $-\frac{1}{3}q_1\mu C^6 + C^4 = \frac{8}{|q_2|\varepsilon^2}$ . Si on renonce aux hypothèses  $I_1 = I_2$  et  $H_1 = H_2$  d'autres solutions bornées peuvent apparaître : des ondes qui sont périodiques sur  $\mathbb{R}^-$  et qui sont homoclines à une autre solution périodique sur  $\mathbb{R}^+$ , quasi-périodiques etc.

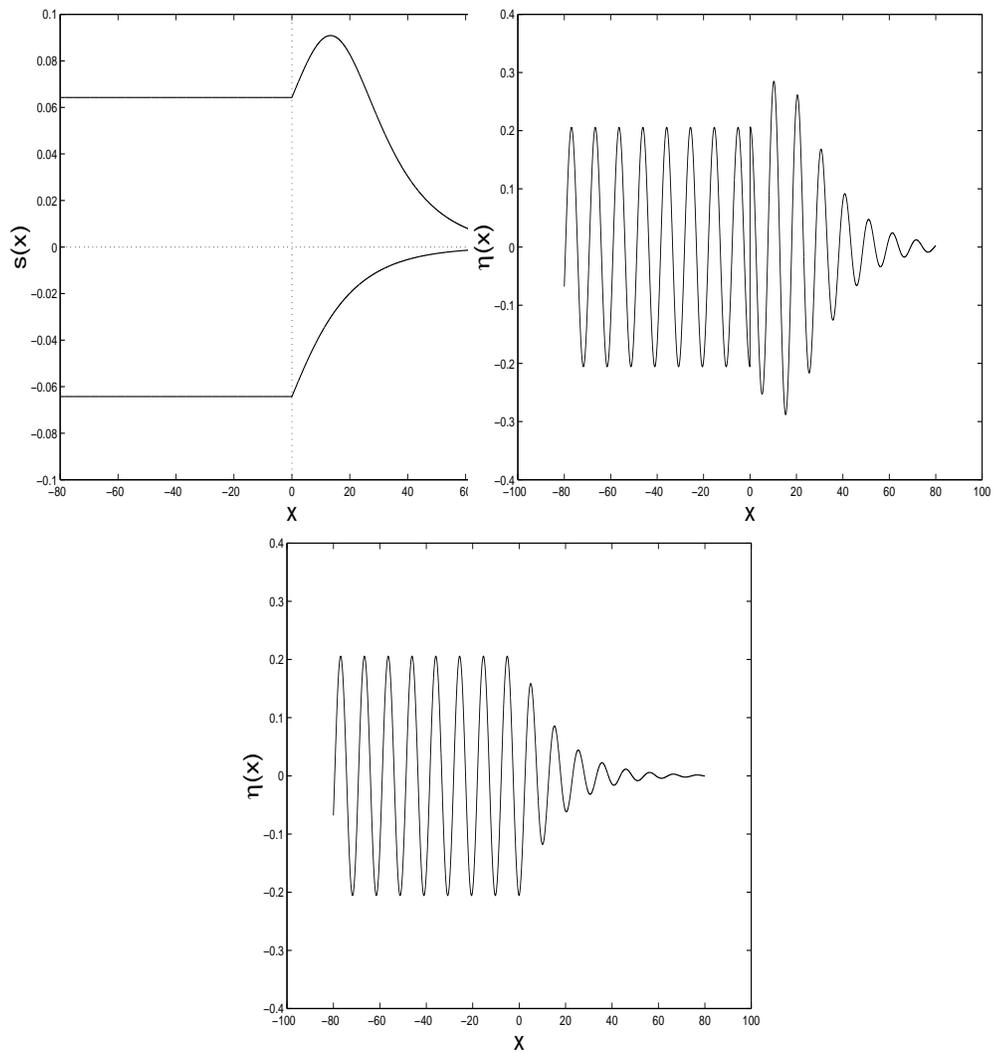


FIG. C.2 – Les profils  $s$  et les profils correspondants  $\eta$  qui sont périodiques sur  $\mathbb{R}^-$  et tendant vers zéro pour  $x \rightarrow \infty$  pour  $q_2 > 0, \mu > 0$ . Les paramètres sont  $k = 2.27, q_1 = 0.489, q_2 = 1.055, \varepsilon = 0.003, \theta_0 = 0, C = 0$ .

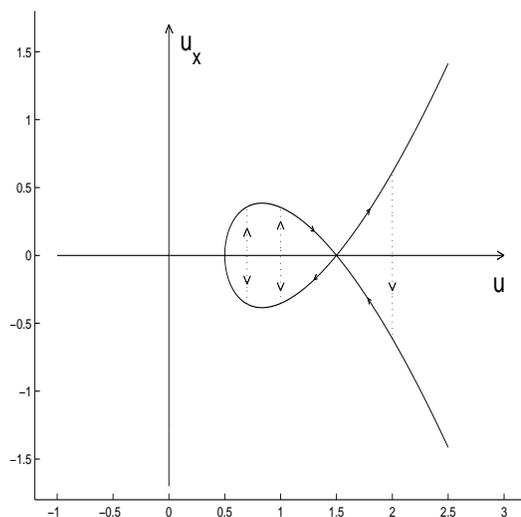


FIG. C.3 – Orbites homoclines à la même onde périodique dans l'espace  $(u, u_x)$  pour  $q_2 < 0, \mu < 0$ .

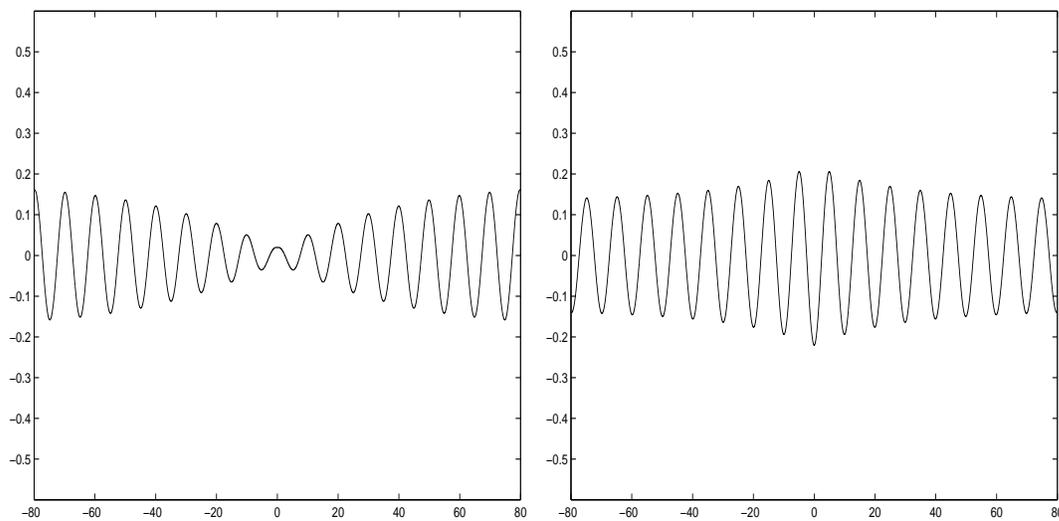


FIG. C.4 – Des profils  $\eta$  des ondes solitaires noires obtenues dans (C.10) et (C.11). Les paramètres choisis correspondent à la profondeur infinie. En plus,  $\varepsilon = 0.003, \mu = -0.0017$  (à gauche),  $\mu = -0.001$  (à droite).



---

## Partie II

### Ondes interfaciales en présence d'une surface libre

---



# Introduction

Il y a eu plusieurs études consacrées aux ondes progressives se propageant à l'interface entre deux couches de fluide, lorsque la couche supérieure est en contact avec l'air.

Quand la couche inférieure de fluide est de profondeur infinie des résultats mathématiques récents [4] ont été obtenus pour les ondes progressives périodiques. Pour les ondes solitaires, d'après nos connaissances, il n'existe pas de théorie mathématique complète.

Quelques travaux théoriques ont été effectués pour une couche inférieure de fluide de profondeur finie, bornée au-dessous par un mur horizontal. Kakutani et Yamasaki [7] ont utilisé une méthode de perturbation classique pour dériver une équation de type KdV et une équation KdV modifiée et ont étudié les solutions ondes solitaires, mais ils n'ont pas trouvé avec cette méthode d'ondes solitaires généralisées. Les ondes solitaires généralisées sont caractérisées par un pulse central et des oscillations à l'infini. Elles ont d'abord été étudiées dans le contexte des ondes de surface de capillarité-gravité (voir [17]). Les premiers qui ont donné une démonstration théorique de l'existence des ondes solitaires généralisées dans un système bi-couche en l'absence des effets de la capillarité à l'interface étaient Sun et Shen [15]. Michallet et Dias [10] ont obtenu des résultats numériques pour ces ondes solitaires généralisées. Ils ont utilisé une méthode basée sur le développement en séries de Fourier tronquées de l'interface, de la surface libre et des potentiels des vitesses en fonction des variables physiques. Moni et LKing [11] ont aussi calculé des ondes solitaires interfaciales en présence d'une surface libre, mais ils n'ont pas calculé des ondes solitaires lentes.

Un autre phénomène intéressant qui peut se produire en absence de tension superficielle quand le fluide supérieur est en contact avec l'air est la résonance 1 :2, c.à.d. le mode

fondamental et le second harmonique des ondes périodiques entrent en résonance. Des ondes périodiques de capillarité-gravité proches de la résonance 1 :2 ont été étudiées par Schwartz et Vanden-Broeck [14] dans le cas d'un seul fluide. Pour les ondes de capillarité-gravité interfaciales entre deux fluides superposés de profondeurs infinies on mentionne l'étude analytique et numérique faite par Christodoulides et Dias [2].

Il y a aussi plusieurs expériences effectuées dans le contexte des ondes solitaires interfaciales en présence d'une surface libre [9] et pour les ondes interfaciales de capillarité-gravité. Les expériences effectuées par Thorpe [16] et Pouliquen et al. [12] montrent que la tension superficielle peut être un facteur important pour les ondes qui se propagent à l'interface entre deux fluides avec des densités proches.

Dans cette partie de la thèse, nous faisons premièrement une étude de la relation de dispersion pour les ondes interfaciales de gravité et de capillarité-gravité dans le cas de deux fluides superposés, en présence d'une surface libre. Pour un nouveau cas qui se produit quand on tient compte des forces capillaires en plus des forces de gravité, nous donnons la forme normale et nous étudions l'existence des ondes solitaires pour le système réduit.

Après cette partie concernant les ondes solitaires, on expose en détail une méthode utilisée pour étudier numériquement les ondes périodiques de gravité qui peuvent apparaître. La méthode est basée sur le schéma utilisé par Saffman et Yuen [13] dans le cas de deux fluides superposés de profondeurs infinies et consiste en un développement en séries de Fourier tronquées des variables physiques en fonction des potentiels des vitesses.

La relation de dispersion pour les ondes périodiques dans un système bi-couche en l'absence des tensions superficielles et quand la couche inférieure de fluide est de profondeur infinie est

$$(1 + R \tanh(kh))c^4 - \frac{g}{k}(1 + \tanh(kh))c^2 + \frac{g^2}{k^2}(1 - R) \tanh(kh) = 0$$

où  $c$  est la vitesse d'onde,  $k$  le nombre d'onde,  $h$  la hauteur de la couche supérieure de fluide,  $R$  le rapport des densités,  $g$  l'accélération due à la gravité. Les deux vitesses sont données par

$$c_{\text{rapide}}^2 = \frac{g}{k}, \quad c_{\text{lente}}^2 = \left(\frac{g}{k}\right) \frac{(1 - R) \tanh(kh)}{1 + R \tanh(kh)}.$$

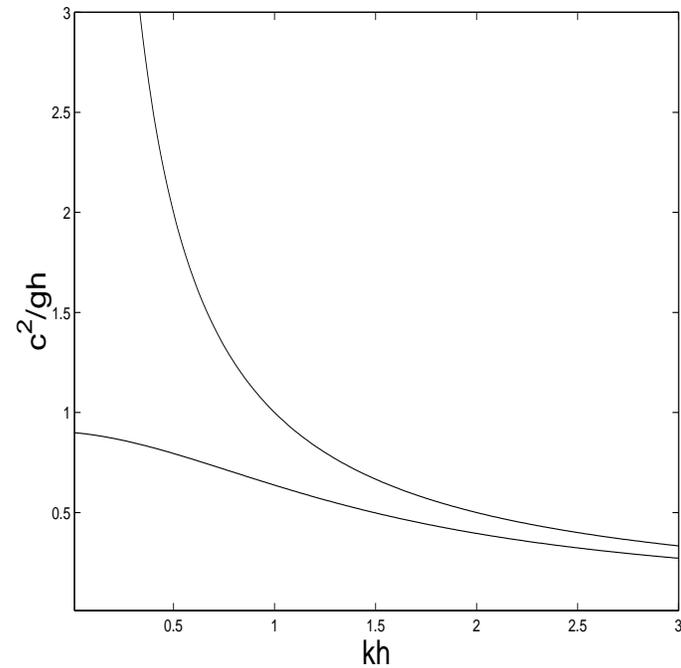


FIG. 6.1 – Les vitesses  $c_{\text{rapide}}^2$  et  $c_{\text{lente}}^2$  (adimensionalisées) en fonction de nombre d’onde sans dimension  $kh$ . La valeur de  $R$  est 0.1.

et sont montrées dans la Fig. 6.1. Nous appelons “ondes lentes” les ondes qui ont la vitesse proche de la courbe inférieure dans la Fig. 6.1 et “ondes rapides” celles qui ont la vitesse proche de la courbe supérieure.

On se concentre sur les ondes périodiques longues lentes qui constituent des approximations des ondes solitaires généralisées. Les cas de la résonance 1 :2 et des ondes périodiques rapides sont également présentés.



# Chapitre 7

## Formulation mathématique du problème

### 7.1 Equations du problème

On ne considère ici que le problème en deux dimensions, c'est-à-dire une direction horizontale et la direction verticale. Soient deux couches de fluides parfaits, incompressibles, de densités  $\rho_1$  et  $\rho_2$ . La couche inférieure est d'épaisseur infinie tandis que la couche supérieure a une épaisseur moyenne  $h$ . On suppose que l'écoulement est irrotationnel dans chaque couche et on considère les effets des tensions superficielles  $T_1$  à l'interface et  $T_2$  à la surface libre. On note toutes les quantités physiques relatives à la couche inférieure (resp. supérieure) avec l'indice 1 (resp. 2).

On s'intéresse uniquement à des ondes progressives qui se propagent avec une vitesse constante  $c$ . Considérons alors le problème dans un repère en translation uniforme de vitesse  $c$ , dans lequel l'écoulement est stationnaire. Des variables sans dimension sont introduites. On choisit  $h$  comme unité de longueur et  $c$  comme unité de vitesse. Les coordonnées sont  $\xi$  dans la direction horizontale et  $\eta$  dans la direction verticale, avec  $\eta = 0$  représentant l'interface au repos. L'interface sera décrite par  $\eta = Z_1(\xi)$  et la surface libre par  $\eta = 1 + Z_2(\xi)$ . Les composantes horizontales et verticales des vitesses sont notées par  $u_i$  et  $w_i$ ,  $i = 1, 2$ . Avec ces notations, les deux couches de fluides deviennent  $\{(\xi, \eta) : -\infty < \xi < \infty, -\infty < \eta < Z_1(\xi)\}$  et  $\{(\xi, \eta) : -\infty < \xi < \infty, Z_1(\xi) < \eta < 1 + Z_2(\xi)\}$ . L'équation de continuité et la condition d'irrotationalité s'écrivent dans chaque couche

sous la forme

$$\begin{cases} u_{i\xi} + w_{i\eta} = 0, \\ u_{i\eta} - w_{i\xi} = 0, \end{cases} \quad i = 1, 2. \quad (7.1.1)$$

Les conditions aux limites sont

$$u_1 \rightarrow 1, \quad w_1 \rightarrow 0 \quad \text{pour } \eta \rightarrow -\infty. \quad (7.1.2)$$

On a deux conditions cinématiques à l'interface

$$u_i Z_{1\xi} - w_i = 0, \quad i = 1, 2 \quad \text{en } \eta = Z_1(\xi) \quad (7.1.3)$$

et une condition cinématique à la surface libre

$$u_2 Z_{2\xi} - w_2 = 0, \quad \text{en } \eta = 1 + Z_2(\xi). \quad (7.1.4)$$

On utilise l'équation de Bernoulli dans chaque fluide et on élimine les pressions à l'interface et à la surface libre pour écrire les conditions dynamiques

$$\frac{1}{2}(u_1^2 + w_1^2 - 1) - \frac{R}{2}(u_2^2 + w_2^2 - 1) + \frac{1-R}{F}Z_1 - \frac{\tau_1}{F} \frac{Z_{1\xi\xi}}{(1 + Z_{1\xi}^2)^{3/2}} = 0 \quad \text{en } \eta = Z_1(\xi), \quad (7.1.5)$$

$$\frac{1}{2}(u_2^2 + w_2^2 - 1) + \frac{1}{F}Z_2 - \frac{\tau_2}{F} \frac{Z_{2\xi\xi}}{(1 + Z_{2\xi}^2)^{3/2}} = 0 \quad \text{en } \eta = 1 + Z_2(\xi), \quad (7.1.6)$$

où les paramètres adimensionnels sont

$$R = \frac{\rho_2}{\rho_1} \in (0, 1), \quad F = \frac{c^2}{gh} > 0, \quad \tau_1 = \frac{T_1}{\rho_1 h^2 g} > 0, \quad \tau_2 = \frac{T_2}{\rho_2 h^2 g} > 0, \quad (7.1.7)$$

$F$  étant le nombre de Froude au carré.

## 7.2 Formulation du problème sous la forme d'un système dynamique

Pour formuler le problème sous la forme d'un système dynamique on utilise le changement de coordonnées introduit par Levi-Civita [8] et appliqué au cas de deux fluides par Iooss [4].

On note par  $\phi_i$ ,  $i = 1, 2$  les potentiels dans les deux fluides et par  $\psi$  la fonction de courant. L'interface et la surface libre,  $\eta = Z_1(\xi)$  et  $\eta = 1 + Z_2(\xi)$ , sont des lignes de courant qui correspondent à  $\psi = 0$  et  $\psi = 1$ . Soit  $\zeta = \xi + i\eta$ . Le potentiel complexe dans les deux couches est  $f_i(\zeta) = \phi_i(\zeta) + i\psi(\zeta)$ ,  $i = 1, 2$  et on définit les nouvelles variables  $f'_i(\zeta) = u_i - iw_i = e^{\beta_i - i\alpha_i}$ . On prend aussi comme nouvelles coordonnées  $f_1 = \phi_1 + i\psi = x + iy$ . Ensuite, on suppose que les deux tensions superficielles sont non-nulles. Dans ce cas on obtient après quelques calculs la nouvelle formulation du problème (voir [4])

$$\frac{dU}{dx} = F(\mu, U) \tag{7.2.8}$$

où  $[U(x)](y) = (Z_1(x), \alpha_{10}(x), \alpha_{21}(x), \alpha_1(x, y), \beta_1(x, y), \alpha_2(x, y), \beta_2(x, y))$ ,  $\mu = (R, F, \tau_1, \tau_2)$ ,

$$F(\mu, U) = \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} e^{-\beta_{10}} \sin \alpha_{10}, \\ \frac{1}{\tau_1} [F \sinh \beta_{10} - FR e^{\beta_{20} - \beta_{10}} \sinh \beta_{20} + (1 - R)Z_1 e^{-\beta_{10}}] \\ \frac{1}{\tau_2} \left[ F \sinh \beta_{21} + e^{-\beta_{21}} (Z_1 + \int_0^1 (e^{-\beta_2} \cos \alpha_2 - 1) dy) \right] \end{array} \right\} e^{\beta_{20} - \beta_{10}} \\ \left. \begin{array}{l} \frac{\partial \beta_1}{\partial y} \\ -\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \end{array} \right\} y \in (-\infty, 0), \\ \left. \begin{array}{l} \frac{\partial \beta_2}{\partial y} e^{\beta_{20} - \beta_{10}} \\ -\frac{\partial \alpha_2}{\partial y} e^{\beta_{20} - \beta_{10}} \end{array} \right\} y \in (0, 1), \end{array} \right. \tag{7.2.9}$$

avec les notations  $\alpha_{ik} = \alpha_i|_{y=k}$ ,  $\beta_{ik} = \beta_i|_{y=k}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $k = 0, 1$  et les conditions aux limites  $\alpha_1, \beta_1 \rightarrow 0$ , pour  $y \rightarrow -\infty$ . La réversibilité du système est donnée par  $R = (1, -1, -1, -1, 1, -1, 1)$ . On note que les expressions pour l'interface et pour la surface libre sont

$$\begin{aligned} Z_1(x) &= \int_{-\infty}^0 (e^{-\beta_1} \cos \alpha_1 - 1) dy, \\ 1 + Z_2(x) &= 1 + Z_1(x) + \int_0^1 (e^{-\beta_2} \cos \alpha_2 - 1) dy. \end{aligned}$$

Le système (7.2.9) linéarisé devient

$$\frac{dU}{dx} = L_\mu U \tag{7.2.10}$$

où l'opérateur linéaire  $L$  est défini par

$$L_\mu U = \begin{pmatrix} \alpha_{10} \\ \frac{1}{\tau_1}(F\beta_{10} - FR\beta_{20} + (1-R)Z_1) \\ \frac{1}{\tau_2}(F\beta_{21} + Z_1 - \int_0^1 \beta_2 dy) \\ \frac{\partial \beta_1}{\partial y} \\ -\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_2}{\partial y} \\ \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} \\ -\frac{\partial \alpha_2}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (7.2.11)$$

Il est facile de vérifier que la partie droite du système est réversible, la réversibilité étant donnée par  $S = \text{diag}(1, -1, -1, -1, 1, -1, 1)$ . Le spectre de l'opérateur  $L_\mu$  est plus compliqué que dans le cas de la profondeur finie. En fait, il est formé d'un ensemble fini des valeurs propres isolées de multiplicités finies qui vérifient une relation de dispersion et de l'axe réel entier qui constitue "le spectre essentiel" (voir Th.1 [4]).

Dans les cas  $\tau_1 = 0$  ou/et  $\tau_2 = 0$  une formulation mathématique similaire est trouvée, mais la forme de  $F$  est différente (pour les détails voir [4]). Par exemple, dans le cas  $\tau_1 = 0$  on peut choisir  $[U(x)](y) = (\beta_{10}(x), Z_2(x), \alpha_{21}(x), \alpha_1(x, y), \beta_1(x, y), \alpha_2(x, y), \beta_2(x, y))$ ,  $\mu = (R, F, \tau_2)$ , et

$$F(\mu, U) = \begin{cases} \left. \begin{array}{l} -\frac{1-R}{F} \sin \alpha_{10} e^{-3\beta_{10}} - R e^{3(\beta_{20}-\beta_{10})} \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} \Big|_{y=0}, \\ e^{-\beta_{21}+\beta_{20}-\beta_{10}} \sin \alpha_{21}, \\ \frac{1}{\tau_2} (F \sinh \beta_{21} + Z_2 e^{-\beta_{21}}) e^{\beta_{20}-\beta_{10}}, \\ \frac{\partial \beta_1}{\partial y} \\ -\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} \end{array} \right\} y \in (-\infty, 0), \\ \left. \begin{array}{l} \frac{\partial \beta_2}{\partial y} e^{\beta_{20}-\beta_{10}} \\ -\frac{\partial \alpha_2}{\partial y} e^{\beta_{20}-\beta_{10}} \end{array} \right\} y \in (0, 1), \end{cases} \quad (7.2.12)$$

avec la linéarisation donnée par

$$L_\mu U = \begin{pmatrix} -\frac{1-R}{F}\alpha_{10} - R\frac{\partial\alpha_2}{\partial y}|_{y=0} \\ \alpha_{21} \\ \frac{1}{\bar{z}}(F\beta_{21} + Z_2) \\ \frac{\partial\beta_1}{\partial y} \\ -\frac{\partial\alpha_1}{\partial y} \\ \frac{\partial\beta_2}{\partial y} \\ \frac{\partial\alpha_2}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (7.2.13)$$

et la réversibilité donnée par  $S = (1, 1, -1, -1, 1, -1, 1)$ .

On utilise ensuite cette section pour déterminer la relation de dispersion.



# Chapitre 8

## Etude de la relation de dispersion

Si l'on étudie le problème linéarisé et que l'on recherche des valeurs propres sous la forme  $ik$ , on obtient la relation de dispersion (pour  $\text{Re } k > 0$ )

$$F^2 k^2 (1 + R \text{th } k) - Fk [1 + \text{th } k + k^2 (\tau_1 + \tau_2 R + \tau_2 \text{th } k)] + \text{th } k (1 - R + k^2 \tau_1) (1 + k^2 \tau_2) = 0. \quad (8.0.1)$$

Il y a une relation symétrique pour  $\text{Re } k < 0$ , mais on va s'occuper uniquement du cas  $\text{Re } k > 0$ , l'autre situation étant analogue. Les vecteurs propres correspondant à la valeur propre  $ik$  ont la forme

$$\phi_0 = (-i/k, 1, \text{ch } k + C \text{sh } k, e^{ky}, i e^{ky}, \text{ch } ky + C \text{sh } ky, i(\text{sh } ky + C \text{ch } ky))^T$$

où  $C = (kF - k^2 \tau_1 - (1 - R))/RkF$ . Ensuite on va étudier numériquement cette relation de dispersion pour voir les configurations nouvelles de valeurs propres sur l'axe imaginaire en fonction des quatre paramètres  $R, \tau_1, \tau_2, F$ .

### 8.1 Cas de gravité pure

En l'absence des tensions superficielles la relation (8.0.1) devient

$$F^2 k^2 (1 + R \text{th } k) - Fk (1 + \text{th } k) + \text{th } k (1 - R) = 0. \quad (8.1.2)$$

Il y a deux solutions pour le paramètre  $F$  :

$$F_1(k) = \frac{1}{k}$$

et

$$F_2(k) = \frac{1}{k} \frac{(1-R) \operatorname{th} k}{1+R \operatorname{th} k}.$$

On observe que  $F_1(k)$  et  $F_2(k)$  sont des fonctions monotones décroissantes avec le comportement asymptotique suivant

$$F_1 \rightarrow 0, \quad F_2 \rightarrow 0 \quad \text{pour } k \rightarrow \infty$$

et

$$F_1 \rightarrow \infty, \quad F_2 \rightarrow 1 - R \quad \text{pour } k \rightarrow 0.$$

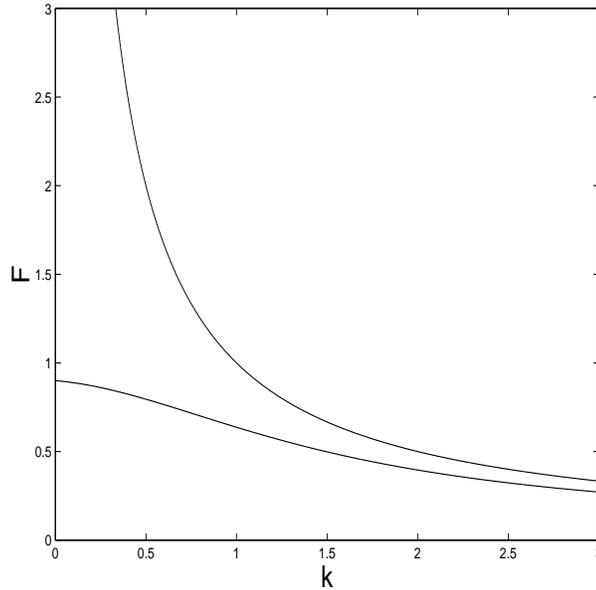


FIG. 8.1 –  $F(k)$  pour  $R = 0.1$ .

Donc il existe toujours une paire de valeurs propres sur l'axe imaginaire  $\pm ik_1 = \pm i/F$ . Pour  $F < 1 - R$ , il y a une autre paire  $\pm ik_2$  avec  $k_2 < k_1$ . Dans ce cas il n'existe pas de résonance 1 :1, mais on peut trouver d'autres résonances fortes :  $k_1/k_2 = n \in \{2, 3, \dots\}$ , selon les paramètres  $F$  et  $R$  (pour plus de détails voir Ch. 10).

Quand  $F \approx 1 - R$  des ondes solitaires généralisées peuvent apparaître, caractérisées par un pulse solitaire et des petites ondulations à l'extrémité du domaine, comme dans le problème des ondes de capillarité-gravité pour  $\lambda \approx 1, b < 1/3$ , où  $\lambda$  est l'inverse du nombre de Froude au carré et  $b$  le nombre de Bond. Une étude numérique des ondes solitaires généralisées sera présentée dans le Ch. 10.

## 8.2 Cas où la tension superficielle et/ou interfaciale est présente

Après quelques calculs, les solutions de l'équation (8.0.1) peuvent être écrites sous la forme

$$F_{1/2}(k) = \frac{1}{2k(1 + R \operatorname{th} k)} \left[ a(k) \mp \sqrt{b(k)} \right] \quad (8.2.3)$$

où

$$\begin{aligned} a(k) &= 1 + \operatorname{th} k + k^2 \tau_1 + k^2 \tau_2 (R + \operatorname{th} k), \\ b(k) &= \left\{ [\tau_1 - \tau_2 (\operatorname{th} k + 2R \operatorname{th}^2 k - R)] k^2 + 1 - 2R \operatorname{th}^2 k - \operatorname{th} k \right\}^2 + \\ &\quad + 4R \operatorname{th} k (1 - \operatorname{th}^2 k) (1 + k^2 \tau_2)^2 (1 + R \operatorname{th} k) \end{aligned}$$

la fonction  $b$  étant une fonction strictement positive pour tout  $k \in \mathbb{R}_+$ , donc  $F_1(k) < F_2(k)$ ,  $\forall k$ . En plus, il est possible de montrer que  $F_{1/2}(k) > 0$ ,  $\forall k \in \mathbb{R}_+$ , en tenant compte de la relation

$$a(k)^2 - b(k) = 4 \operatorname{th} k (1 + R \operatorname{th} k) (k^2 \tau_1 + 1 - R) (k^2 \tau_2 + 1),$$

donc à chaque  $k$  correspondent deux valeurs du paramètre  $F$ . Le comportement asymptotique de  $F_1$  et  $F_2$  est le suivant :

$$\left. \begin{aligned} F_1 &\sim (1 - R) - R(1 - R)k + \left( -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}R + R^2 - R^3 + \tau_1 R + (1 - R)^2 \tau_2 \right) k^2 \\ F_2 &\sim \frac{1}{k} + (\tau_1 + R\tau_2)k - 2R(\tau_1 - \tau_2(1 - R))k^2, \end{aligned} \right\} \text{ pour } k \rightarrow 0,$$

$$\left. \begin{aligned} F_1 &\sim \frac{\tau_1 + \tau_2(1 + R) - |\tau_1 - \tau_2(1 + R)|}{2(1 + R)} k + \frac{1 - \operatorname{sgn}(\tau_1 - \tau_2(1 + R))R}{1 + R} \frac{1}{k} \\ F_2 &\sim \frac{\tau_1 + \tau_2(1 + R) + |\tau_1 - \tau_2(1 + R)|}{2(1 + R)} k + \frac{1 + \operatorname{sgn}(\tau_1 - \tau_2(1 + R))R}{1 + R} \frac{1}{k} \end{aligned} \right\} \text{ pour } k \rightarrow \infty.$$

Il est évident que dans le cas  $\tau_1 = 0, \tau_2 \neq 0$  ou  $\tau_1 \neq 0, \tau_2 = 0$  on a  $F_1 \rightarrow 0$  et  $F_2 \rightarrow \infty$  quand  $k \rightarrow \infty$ , et pour  $\tau_1 \tau_2 \neq 0$ ,  $F_1 \rightarrow \infty$  et  $F_2 \rightarrow \infty$  quand  $k \rightarrow \infty$ .

Il existe au maximum quatre paires de valeurs propres  $\pm ik$  sur l'axe imaginaire quand  $\tau_1 \tau_2 \neq 0$  et trois quand  $\tau_1 \tau_2 = 0$ .

Evidemment, il y a plus de possibilités que dans le cas d'un seul fluide. Dans le cas  $\tau_1 \tau_2 \neq 0$  il peut exister en fonction des valeurs des quatre paramètres :

- (i) une paire de valeurs propres quadruples  $\pm ik$  sur l'axe imaginaire (voir Fig. 8.2),
- (ii) une paire de valeurs propres triples  $\pm ik_1$  et une paire de valeurs propres simples  $\pm ik_2$ ,  $k_2 \neq k_1$ ,

- (iii) une paire de valeurs propres doubles  $\pm ik_1$  et une autre paire de valeurs propres simples  $ik_2$ ,  $k_2 \neq k_1$ ,
- (iv) une paire de valeurs propres doubles  $\pm ik_1$  et deux paires de valeurs propres simples  $ik_2$  et  $ik_3$  avec  $k_1 \neq k_2 \neq k_3 \neq k_1$ ,
- (v) deux paires de valeurs propres doubles  $\pm ik_1$  et  $\pm ik_2$ ,
- (vi) une seule paire de valeurs propres doubles  $\pm ik$  (la résonance 1 :1 classique) et une, deux, trois ou quatre paires de valeurs propres simples.

Le cas quand il y a une paire de valeurs propres doubles  $\pm ik_1$  sur l'axe imaginaire et une autre valeur propre simple  $ik_2$  avec  $k_2/k_1 \notin \mathbb{Q}$  (en présence de réversibilité) est traité en détail dans [6].

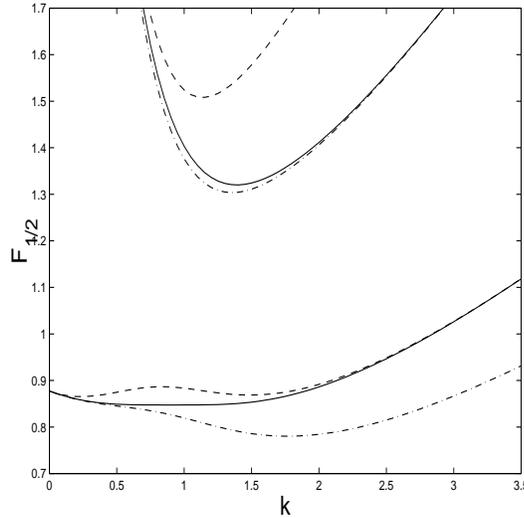


FIG. 8.2 –  $F$  en fonction de  $k$  pour  $\tau_1 \neq 0, \tau_2 \neq 0$ . La valeur propre quadruple est dans ce cas  $0.9i$  qui correspond aux valeurs de paramètres  $R = 0.1228, \tau_1 = 0.2874, \tau_2 = 0.466, F = 0.8472$  (—). Les deux autres courbes sont des solutions  $F(k)$  pour des valeurs des paramètres proches de cette valeur :  $R = 0.1228, \tau_1 = 0.2874, \tau_2 = 0.66$  (---) et  $R = 0.1228, \tau_1 = 0.2274, \tau_2 = 0.466, (- \cdot -)$ .

Quand  $\tau_1 \tau_2 = 0$  il est possible d'avoir :

- (i) une paire de valeurs propres triples sur l'axe imaginaire  $\pm ik$  (voir Fig. 8.5) ,
- (ii) une paire de valeurs propres doubles  $\pm ik_1$  et une paire de valeurs propres simples  $\pm ik_2$ ,  $k_2 \neq k_1$ ,
- (iii) une paire de valeurs propres doubles  $ik$  (la résonance 1 :1)

et une, deux ou trois paires de valeurs propres simples.

On montre la courbe de l'existence du point triple dans l'espace des paramètres  $(R, \tau_1)$  et  $(F, \tau_1)$  (pour  $\tau_2 = 0$ ) ou  $(R, \tau_2)$  et  $(F, \tau_2)$  (pour  $\tau_1 = 0$ ) dans la Figure 8.3 et dans la Figure 8.4. Un autre cas nouveau survient quand deux résonances 1 :1 sont très proches (voir Figure 8.6).

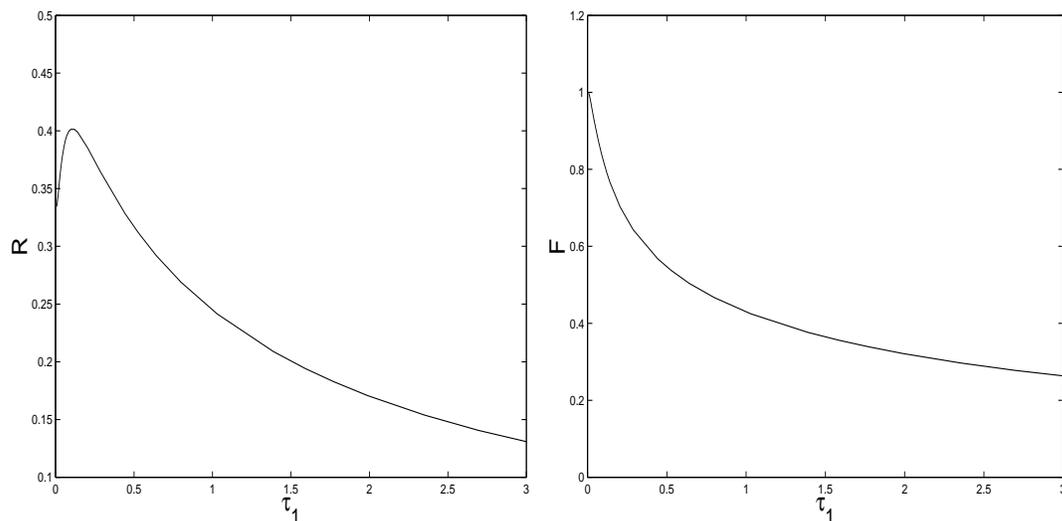


FIG. 8.3 – Les courbes  $(R(k), \tau_1(k))$  et  $(F(k), \tau_1(k))$  qui correspondent aux points triples sur l'axe imaginaire  $ik$  quand  $\tau_2 = 0$ .

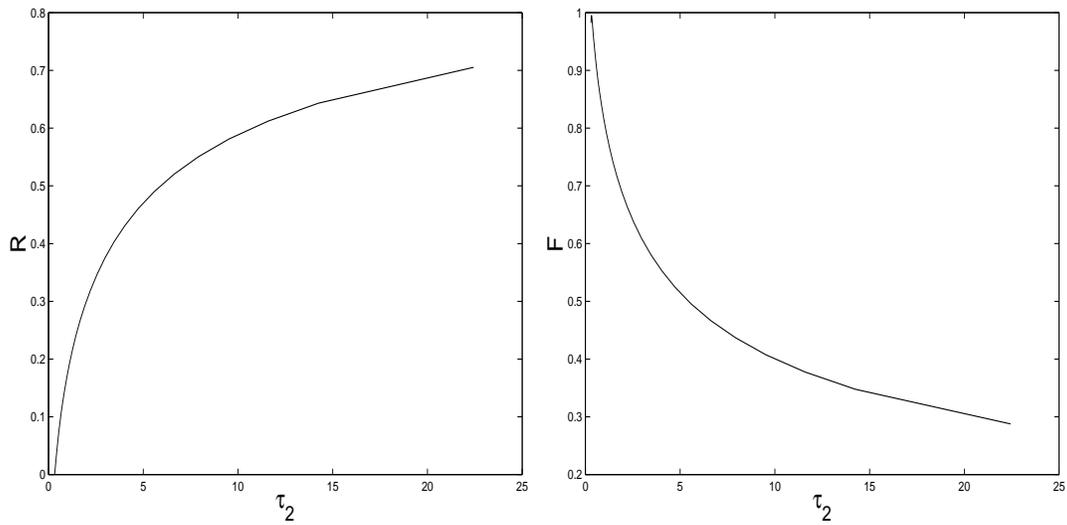


FIG. 8.4 – Les courbes  $(R(k), \tau_2(k))$  et  $(F(k), \tau_2(k))$  qui correspondent aux points triples sur l'axe imaginaire  $ik$  quand  $\tau_1 = 0$ .

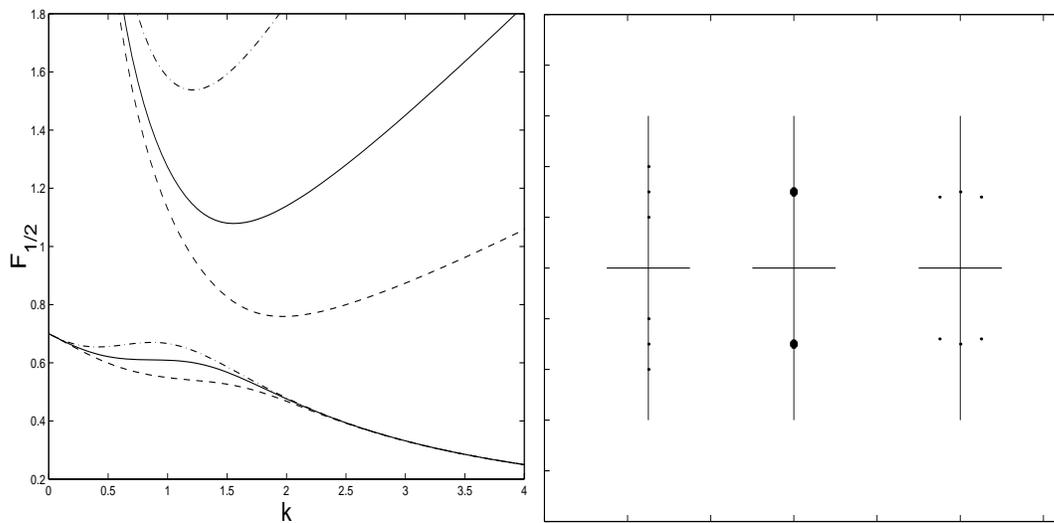


FIG. 8.5 – A gauche : les courbes  $F_1$  et  $F_2$  pour  $R = 0.3, \tau_2 = 0$  et  $\tau_1 = 0.3$  (---),  $\tau_1 = 0.55$  (—),  $\tau_1 = 1$  (- · -). Le point triple apparaît pour  $\tau_1 = 0.55$ . A droite : le schéma des valeurs propres proches de l'axe imaginaire dans le voisinage d'une valeur propre triple.

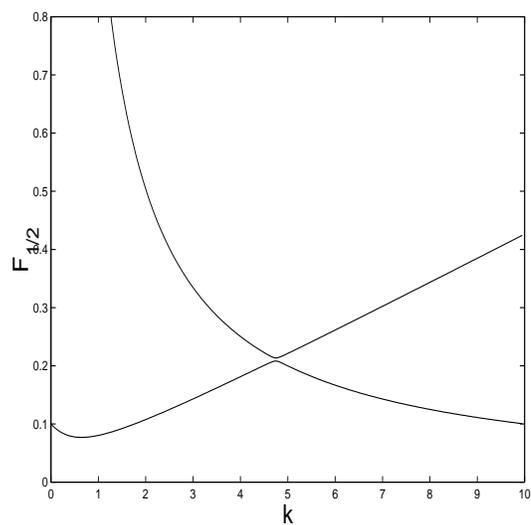


FIG. 8.6 –  $F_1$  et  $F_2$  pour  $R = 0.9$ ,  $\tau_2 = 0$  et  $\tau_1 = 0.08$ . On observe les deux valeurs propres doubles qui sont très proches, mais on peut montrer qu'elles ne peuvent jamais fusionner, quelque soit la configuration des paramètres.



# Chapitre 9

## Forme normale dans le cas d'une valeur propre triple imaginaire

On étudie ensuite le cas  $\tau_1\tau_2 = 0$  quand  $ik_0$  est une valeur propre triple fixée,  $v_1, v_2, v_3$  les vecteurs propres et les vecteurs propres généralisés correspondants  $(L - ik_0)v_1 = 0, (L - ik_0)v_2 = v_1, (L - ik_0)v_3 = v_2$  (tels que  $Sv_1 = \bar{v}_1, Sv_2 = -\bar{v}_2, Sv_3 = \bar{v}_3$ ) et  $(F_0, R_0, \tau_{20})$  les valeurs des paramètres en ce point, où  $L$  est l'opérateur linéaire de la linéarisation du système (7.2.8). On va considérer des valeurs de  $\underline{\mu} = (F, R, \tau_2)$  dans le voisinage de ce point. On écrit  $V = z_1v_1 + z_2v_2 + z_3v_3 + \bar{z}_1\bar{v}_1 + \bar{z}_2\bar{v}_2 + \bar{z}_3\bar{v}_3$  et on obtient, en tenant compte de l'équation pour  $V$  dans  $E_0 = \text{Sp}\{v_i, \bar{v}_i, i = 1, 2, 3\}$ , le système suivant

$$\begin{aligned}\frac{dz_1}{dx} &= ik_0z_1 + z_2 + N_1(\underline{\mu}, z_i, \bar{z}_i), \\ \frac{dz_2}{dx} &= ik_0z_2 + z_3 + N_2(\underline{\mu}, z_i, \bar{z}_i), \\ \frac{dz_3}{dx} &= ik_0z_3 + N_3(\underline{\mu}, z_i, \bar{z}_i).\end{aligned}\tag{9.0.1}$$

On a la réversibilité  $(z_1, z_2, z_3) \rightarrow (\bar{z}_1, -\bar{z}_2, \bar{z}_3)$  et on introduit

$$Z_1 = z_1\bar{z}_1, \quad Z_2 = \frac{i}{2}(z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2), \quad Z_3 = z_1\bar{z}_3 + \bar{z}_1z_3 - z_2\bar{z}_2,$$

$$Z_4 = \bar{z}_1^2(z_2^2 - 2z_1z_3), \quad Z_5 = (z_2^2 - 2z_1z_3)(\bar{z}_2^2 - 2\bar{z}_1\bar{z}_3).$$

Il est possible de montrer (voir Iooss [5]) que la forme normale réversible pour ce système

est

$$\begin{aligned}
 N_1 &= iz_1\{P_0(Z_1, \dots, Z_4) + Z_5P_1(Z_2, \dots, Z_5)\} + i\bar{z}_1(z_2^2 - 2z_1z_3)P_2(Z_2, \dots, Z_5) \\
 N_2 &= iz_2\{P_0(Z_1, \dots, Z_4) + Z_5P_1(Z_2, \dots, Z_5)\} + i\bar{z}_2(z_2^2 - 2z_1z_3)P_2(Z_2, \dots, Z_5) + \\
 &\quad + z_1\{Q_0(Z_1, \dots, Z_4) + Z_5Q_1(Z_2, \dots, Z_5)\} + \bar{z}_1(z_2^2 - 2z_1z_3)Q_2(Z_2, \dots, Z_5) \\
 N_3 &= iz_3\{P_0(Z_1, \dots, Z_4) + Z_5P_1(Z_2, \dots, Z_5)\} + z_2\{Q_0(Z_1, \dots, Z_4) + \\
 &\quad + Z_5(Z_2, \dots, Z_5)Q_1\} + iz_1\{R_0(Z_1, \dots, Z_4) + Z_5R_1(Z_2, \dots, Z_5)\} + \\
 &\quad + (i\bar{z}_3P_2(Z_2, \dots, Z_5) + \bar{z}_2Q_2(Z_2, \dots, Z_5) + i\bar{z}_1R_2(Z_2, \dots, Z_5))(z_2^2 - 2z_1z_3)
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 P_0(Z_1, \dots, Z_4) &= \mu_1 + p_1Z_1 + p_2Z_2 + p_3Z_3 + p_4Z_4 + \dots, \\
 Q_0(Z_1, \dots, Z_4) &= \mu_2 + q_1Z_1 + \dots, \\
 R_0(Z_1, \dots, Z_4) &= \mu_3 + \rho_1Z_1 + \dots.
 \end{aligned}$$

$\mu_1, \mu_2, \mu_3$  sont des petits paramètres qui dépendent de  $\underline{\mu}$ .

On étudie le système jusqu'à l'ordre 3, pour voir si la forme normale réduite admet des ondes solitaires :

$$\begin{aligned}
 \frac{dz_1}{dx} &= ik_0z_1 + z_2 + iz_1(\mu_1 + p_1|z_1|^2 + \dots) \\
 \frac{dz_2}{dx} &= ik_0z_2 + z_3 + iz_2(\mu_1 + p_1|z_1|^2 + \dots) + z_1(\mu_2 + q_1|z_1|^2 + \dots) \\
 \frac{dz_3}{dx} &= ik_0z_3 + iz_3(\mu_1 + p_1|z_1|^2 + \dots) + z_2(\mu_2 + q_1|z_1|^2 + \dots) + iz_1(\mu_3 + \rho_1|z_1|^2 + \dots)
 \end{aligned} \tag{9.0.2}$$

On choisit  $\mu \sim \mu_3$ , on effectue le changement de variables

$$\begin{aligned}
 z_1(x)e^{-ik_0x} &= |\mu|^{1/2}\tilde{z}_1(\tilde{x}), \quad z_2(x)e^{-ik_0x} = |\mu|^{5/6}\tilde{z}_2(\tilde{x}), \quad z_3(x)e^{-ik_0x} = |\mu|^{7/6}\tilde{z}_3(\tilde{x}), \\
 \tilde{x} &= |\mu|^{1/3}x, \quad \mu_1 = |\mu|^{1/3}\tilde{\mu}_1, \quad \mu_2 = |\mu|^{2/3}\tilde{\mu}_2, \quad \mu_3 = |\mu|\tilde{\mu}_3,
 \end{aligned}$$

et on obtient

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{z}_1}{d\tilde{x}} = i\tilde{\mu}_1\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2 + O(|\mu|^{1/3}) \\ \frac{d\tilde{z}_2}{d\tilde{x}} = i\tilde{\mu}_1\tilde{z}_2 + \tilde{z}_3 + \tilde{z}_1\tilde{\mu}_2 + O(|\mu|^{1/3}) \\ \frac{d\tilde{z}_3}{d\tilde{x}} = i\tilde{\mu}_1\tilde{z}_3 + \tilde{z}_2\tilde{\mu}_2 + i\tilde{z}_1\tilde{\mu}_3 + i\rho_1\tilde{z}_1|\tilde{z}_1|^2 + O(|\mu|^{1/3}) \end{cases} \tag{9.0.3}$$

En omettant les termes  $O(|\mu|^{1/3})$ , on a le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{z}_1}{d\tilde{x}} = i\tilde{\mu}_1\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2 \\ \frac{d\tilde{z}_2}{d\tilde{x}} = i\tilde{\mu}_1\tilde{z}_2 + \tilde{z}_3 + \tilde{z}_1\tilde{\mu}_2 \\ \frac{d\tilde{z}_3}{d\tilde{x}} = i\tilde{\mu}_1\tilde{z}_3 + \tilde{z}_2\tilde{\mu}_2 + i\tilde{z}_1\tilde{\mu}_3 + i\rho_1\tilde{z}_1|\tilde{z}_1|^2 \end{cases} \tag{9.0.4}$$

On cherche des ondes solitaires numériquement en utilisant une technique décrite par Champneys et al. [1] pour obtenir les conditions initiales. Le système (9.0.4) devient, si

on remplace  $\tilde{z}_i$  par les fonctions réelles  $y_i$  ( $\tilde{z}_1 = y_1 + iy_4, \tilde{z}_2 = y_2 + iy_5, \tilde{z}_3 = y_3 + iy_6$ )

$$\begin{cases} y_{1x} = y_2 - \mu_1 y_4 \\ y_{2x} = \mu_2 y_1 + y_3 - \mu_1 y_5 \\ y_{3x} = \mu_2 y_2 - \mu_3 y_4 - \mu_1 y_6 - \rho_1 y_4 (y_1^2 + y_4^2) \\ y_{4x} = \mu_1 y_1 + y_5 \\ y_{5x} = \mu_1 y_2 + \mu_2 y_4 + y_6 \\ y_{6x} = \mu_3 y_1 + \mu_1 y_3 + \mu_2 y_5 + \rho_1 y_1 (y_1^2 + y_4^2). \end{cases} \quad (9.0.5)$$

L'opérateur du problème linéarisé a toujours une paire de valeurs propres imaginaires simples  $\pm ik_s$ , les quatre autres valeurs propres étant conjuguées et symétriques par rapport aux axes. On les note  $\pm\lambda + i(\pm\omega)$ ,  $\lambda > 0$ . On cherche des solutions homoclines à zéro  $y_i \rightarrow 0$  pour  $x \rightarrow \pm\infty$ . Les calculs sur un intervalle infini n'étant pas faisables, on va le tronquer en un intervalle fini  $[0, T]$ . Le problème est transformé en un problème avec des conditions initiales, c.à.d. on donne explicitement une condition initiale de dimension six pour le système (9.0.5), en plaçant  $\mathbf{y}(0) = (y_1(0), y_2(0), y_3(0), y_4(0), y_5(0), y_6(0))$  dans l'espace instable de 0 et on va rechercher les solutions qui vérifient une condition aux limites en  $T$   $y_i(T) = 0$ . Donc on prend

$$\mathbf{y}(0) = \epsilon(\mathbf{v}_1 \cos \delta + \mathbf{v}_2 \sin \delta)$$

où  $\mathbf{v}_1 \pm i\mathbf{v}_2$  sont les vecteurs propres correspondant aux  $\lambda \pm i\omega$  où  $\epsilon$  est petit et  $0 \leq \delta < 2\pi$ . Dans les simulations numériques on a pris  $\epsilon = 10^{-4}$ .

Pour des valeurs de  $\tilde{\mu}_2$  et  $\tilde{\mu}_3$  proches d'une courbe  $\tilde{\mu}_3 = \pm 2(-2/3\tilde{\mu}_2)^{\frac{3}{2}}$ ,  $\tilde{\mu}_2 < 0$  dans l'espace  $(\tilde{\mu}_2, \tilde{\mu}_3)$  et pour  $\rho_1$  ayant un signe opposé à celui de  $\tilde{\mu}_3$ , on trouve des ondes solitaires. Cette courbe correspond à une valeur propre double et à une valeur propre simple sur l'axe imaginaire et leurs conjuguées pour le système (9.0.4). La région des ondes solitaires se trouve le long de cette courbe (la zone hachurée dans la Fig. 9.1), là où il y a une paire de valeurs propres conjuguées imaginaires et quatre valeurs propres complexes, symétriques par rapport aux axes.

On montre dans la Fig. 9.1 une solution correspondant à des valeurs des paramètres dans cette région. On prend le cas  $\tilde{\mu}_2 = -0.94, \tilde{\mu}_3 = -1., \tilde{\mu}_1 = 0.5, \rho_1 = 1$ . Ces ondes solitaires ressemblent à celles obtenues dans le cadre du phénomène de confusion de fréquence, mais elles possèdent en plus un second nombre d'onde. De petites oscillations sont visibles dans la queue de l'onde solitaire.

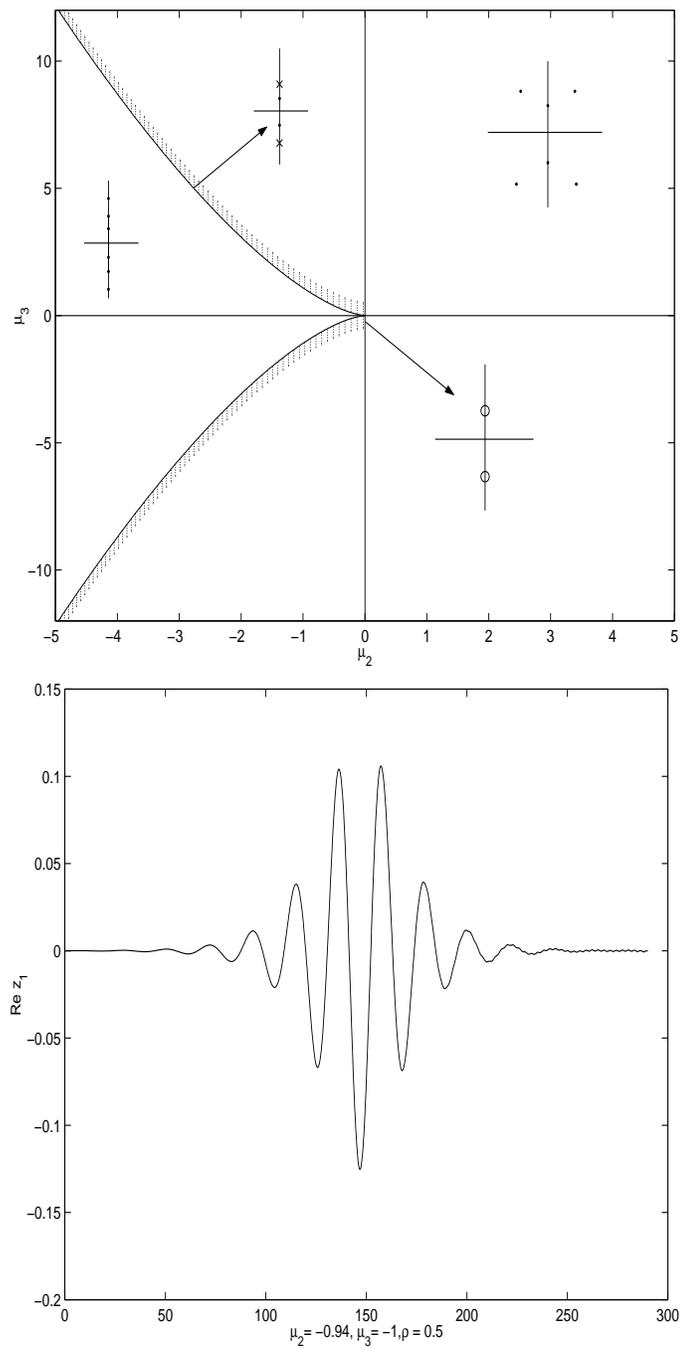


FIG. 9.1 – En haut : région où l'on trouve les ondes solitaires et le changement dans le comportement des valeurs propres proches de l'axe imaginaire. Le symbole (o) représente la valeur propre triple et (x) une valeur propre double. En bas : profil d'une onde solitaire

La réduction des équations complètes n'a pas été effectuée, donc on n'a pas calculé de façon quantitative ces ondes solitaires . Le calcul des coefficients de la forme normale serait une tâche très difficile.



# Chapitre 10

## Etude numérique des ondes de gravité périodiques

### 10.1 Formulation

On donne une nouvelle formulation du problème, cette fois pour étudier numériquement les ondes périodiques de gravité. Toutes les quantités relatives à la couche inférieure sont notées avec l'indice 1 et celles relatives à la couche supérieure sont notées avec l'indice 2. Les paramètres physiques et les nombres adimensionnels sont donnés dans les Tables 10.1 et 10.2.

Les équations du mouvement dans chaque fluide sont

$$\Delta\Phi_i = 0, \quad i = 1, 2. \quad (10.1.1)$$

A l'interface il y a les conditions cinématiques

$$U_i Y_X - V_i = 0, \quad i = 1, 2. \quad (10.1.2)$$

En utilisant l'équation de Bernoulli dans chaque fluide et en éliminant les pressions à l'interface, on peut écrire la condition dynamique sous la forme

$$\frac{1}{2}(U_1^2 + V_1^2) - \frac{1}{2}R(U_2^2 + V_2^2) + (1 - R)\frac{1}{F_\lambda}Y = \frac{1}{2}(1 - R) + \frac{1}{2}B. \quad (10.1.3)$$

Sur la surface libre il y a aussi la condition cinématique

$$U_2 Y_{SX} - V_2 = 0. \quad (10.1.4)$$

symbole	quantité physique	dimension
$c$	la vitesse d'onde	$[L][T]^{-1}$
$g$	l'accélération due à la gravité	$[L][T]^{-2}$
$h$	l'épaisseur de la couche de fluide	$[L]$
$\lambda$	longueur d'onde	$[L]$
$k$	nombre d'onde	$[L]$
$\rho_j$	la densité du fluide dans la couche $j$	$[M][L]^{-3}$
$(x, y)$	les coordonnées physiques	$[L]$
$(u_j, v_j)$	les composantes de la vitesse dans la couche $j$	$[L][T]^{-1}$
$\psi(x, y)$	la fonction de courant $\psi_x = -v_j, \psi_y = u_j$	$[L]^2[T]^{-1}$
$\phi(x, y)$	le potentiel des vitesses $\phi_x = u_j, \phi_y = v_j$	$[L]^2[T]^{-1}$
$\eta(x)$	le profil de l'interface	$[L]$
$\eta_S(x)$	le profil de la surface libre	$[L]$

TAB. 10.1 – Les paramètres physiques et leur dimensions

En utilisant de nouveau l'équation de Bernoulli, la condition dynamique sur la surface libre s'écrit

$$\frac{1}{2}(U_2^2 + V_2^2) + \frac{1}{F_\lambda} Y_S = \frac{1}{2} + \frac{H}{F_\lambda} + \frac{1}{2}B'. \quad (10.1.5)$$

On a noté par  $B$  et  $B'$  les constantes de Bernoulli inconnues. Le niveau moyen de l'interface est fixé à zéro et on considère uniquement des ondes symétriques. Le milieu des vagues est en  $X = 0$  et notre étude est restreinte à des valeurs de  $X$  entre 0 et  $\frac{1}{2}$ . La condition de la valeur moyenne à l'interface est écrite comme

$$\int_0^{\frac{1}{2}} Y(X) dX = 0, \quad (10.1.6)$$

tandis que la valeur moyenne sur la surface libre est donnée par

$$2 \int_0^{\frac{1}{2}} Y_S(X) dX = H. \quad (10.1.7)$$

Le problème dépend de trois paramètres indépendants :  $F_\lambda$ ,  $R$  et  $H$ .

## 10.2 Etude de la relation de dispersion

La relation de dispersion pour les ondes périodiques est

$$[1 + R \tanh(2\pi H)]F_\lambda^2 - \frac{F_\lambda}{2\pi} [1 + \tanh(2\pi H)] + \frac{1}{4\pi^2} (1 - R) \tanh(2\pi H) = 0. \quad (10.2.8)$$

symbole	définition	quantité sans dimension
$H$	$h/\lambda$	la hauteur relative de la couche supérieure de fluide
$K$	$kh$	le nombre d'onde adimensionnel
$R$	$\rho_2/\rho_1$	le rapport des densités
$F_\lambda$	$c^2/g\lambda$	le nombre de Froude au carré basé sur la longueur d'onde
$F$	$c^2/gh$	le nombre de Froude au carré basé sur la profondeur
$X$	$x/\lambda$	la coordonnée horizontale adimensionnelle
$(U_j, V_j)$	$\frac{1}{c}(u_j, v_j)$	les composantes des vitesses adimensionnelles
$Y(X)$	$\eta/\lambda$	le profil adimensionnel de l'interface
$Y_S(X)$	$\eta_S/\lambda$	le profil adimensionnel de la surface libre
$(\Phi, \Psi)$	$\frac{1}{c\lambda}(\phi, \psi)$	le potentiel et la fonction de courant sans dimension
$f$	$\Phi + i\Psi$	le potentiel complexe adimensionnel

TAB. 10.2 – Les quantités adimensionnelles

avec les solutions

$$F_{\lambda_{\text{rapide}}} = \frac{1}{2\pi}, \quad F_{\lambda_{\text{lente}}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{(1-R) \tanh(2\pi H)}{1+R \tanh(2\pi H)}$$

ou, basées sur  $K$  et  $F$

$$F_{\text{rapide}} = \frac{1}{K}, \quad F_{\text{lente}} = \frac{1}{K} \cdot \frac{(1-R) \tanh(K)}{1+R \tanh(K)}.$$

On remarque les relations existant entre les paramètres adimensionnels

$$K = 2\pi H, \quad F_\lambda = \frac{FK}{2\pi}.$$

Comme on l'avait dit dans la section 8.1 il existe deux courbes pour la bifurcation des ondes périodiques et on les note  $F_{\lambda_{\text{rapide}}}$  (la courbe supérieure) et  $F_{\lambda_{\text{lente}}}$  (la courbe inférieure). Pour un nombre d'onde fixé, on s'attend à ce que des ondes périodiques bifurquent des deux branches. Toutefois, la présence des résonances complique l'image globale.

Comme pour les ondes de capillarité-gravité, on s'attend à ce que les ondes périodiques bifurquées aient une vitesse plus grande que  $F_{\lambda_{\text{rapide}}}$  le long de la courbe supérieure. Le long de la courbe inférieure, les ondes périodiques bifurquées doivent avoir une vitesse plus grande que  $F_{\lambda_{\text{lente}}}$  quand le nombre d'onde est petit. Pourtant, quand la résonance 1 :2 est atteinte, on s'attend à ce que les ondes bifurquées aient une vitesse plus petite.

Il est instructif de tracer la courbe  $K_2/K_1$  en fonction de  $F$ , plus petit que  $F_{\text{lente}}(0)$  et  $K_1, K_2 > K_1$  sont les nombres d'onde sans dimension. Quand  $F$  approche  $F_{\text{lente}}(0)$ , le

rapport  $K_2/K_1$  est un fonction croissante vers l'infini, parce que  $K_2$  est fini et  $K_1 \rightarrow 0$ . Quand  $F$  tend vers zéro,  $K_2/K_1 \searrow \frac{1+R}{1-R}$ . On peut observer qu'on a la résonance 1 :2 uniquement pour  $R < 1/3$ . On trace cette courbe pour  $R = 0.1$  et  $R = 0.9$  et on remarque la résonance 1 :2 dans le premier cas pour  $F = 0.74078$ ,  $K_1 = 0.67496$ . Dans le deuxième cas il n'y a pas la résonance 1 :2, parce que  $K_2/K_1 \geq 19$ .

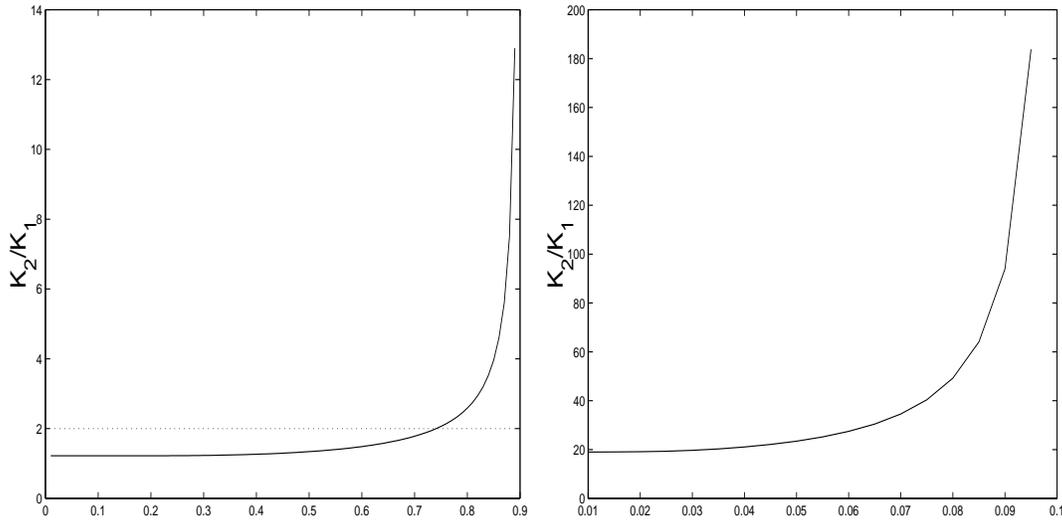


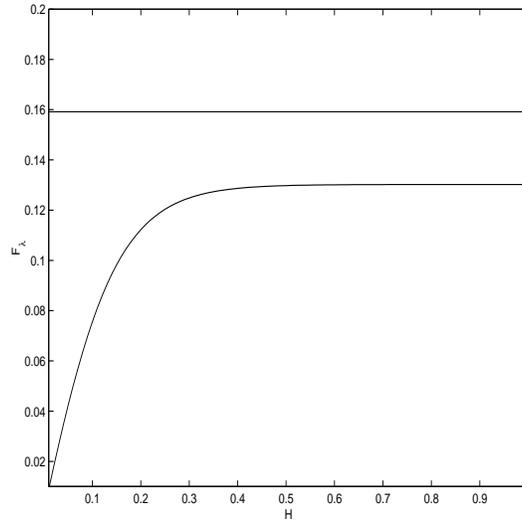
FIG. 10.1 –  $K_2/K_1$  en fonction de  $F$  pour  $F \in (0, 1 - R)$  dans deux cas :  $R = 0.1$  et  $R = 0.9$ . Le phénomène de résonance 1 :2 existe uniquement dans le premier cas pour  $F = 0.74078$ ; dans le deuxième cas  $K_2/K_1 \geq 19$

On représente la courbe de dispersion dans l'espace  $(H, F_\lambda)$  pour  $R = 0.1$  dans la Fig. 10.2. Dans l'espace  $(K, F)$  la courbe de dispersion est montrée dans la Fig. 10.3.

### 10.3 Schéma numérique pour les ondes périodiques

On suit l'approche de Saffman & Yuen [13] et on l'étend à notre cas, quand il y a, en plus de l'interface, la surface libre. L'idée est de développer en série de Fourier tronquée les variables physiques  $X$  et  $Y$  en fonction du potentiel  $\Phi$ . Dans chaque fluide on obtient

$$X_1 = \Phi_1 + \sum_{n=1}^N a_n \sin(2\pi n \Phi_1) \exp(2\pi n \Psi_1), \quad (10.3.1)$$


 FIG. 10.2 –  $F_\lambda$  vs.  $H$  pour  $R = 0.1$ 

$$Y_1 = \Psi_1 + a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos(2\pi n \Phi_1) \exp(2\pi n \Psi_1), \quad (10.3.2)$$

et

$$X_2 = \Phi_2 - \sum_{n=1}^N \sin(2\pi n \Phi_2) [b_n \cosh(2\pi n \Psi_2) - d_n \sinh(2\pi n \Psi_2)], \quad (10.3.3)$$

$$Y_2 = \Psi_2 + b_0 - \sum_{n=1}^N \cos(2\pi n \Phi_2) [b_n \sinh(2\pi n \Psi_2) - d_n \cosh(2\pi n \Psi_2)]. \quad (10.3.4)$$

L'interface est décrite par  $\Psi_1 = \Psi_2 = 0$ .

Le fait que les deux potentiels  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  sur l'interface ne soient pas égaux est traité en introduisant deux nouvelles variables :

$$\Phi_1 = \xi - s, \quad \Phi_2 = \xi + s. \quad (10.3.5)$$

La fonction inconnue  $s$  est développée en série de Fourier

$$s(\xi) = \sum_{n=1}^{N-1} c_n \sin(2\pi n \xi). \quad (10.3.6)$$

Alors, le long de l'interface on a

$$X_1 = \xi - s + \sum_{n=1}^N a_n \sin(2\pi n (\xi - s)), \quad (10.3.7)$$

$$Y_1 = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos(2\pi n(\xi - s)), \quad (10.3.8)$$

et

$$X_2 = \xi + s - \sum_{n=1}^N b_n \sin(2\pi n(\xi + s)), \quad (10.3.9)$$

$$Y_2 = b_0 + \sum_{n=1}^N d_n \cos(2\pi n(\xi + s)). \quad (10.3.10)$$

Le long de la surface libre

$$X_2 = \Phi_2 - \sum_{n=1}^N \sin(2\pi n\Phi_2) [b_n \cosh(2\pi n\Psi_H) - d_n \sinh(2\pi n\Psi_H)], \quad (10.3.11)$$

$$Y_2 = \Psi_H + b_0 - \sum_{n=1}^N \cos(2\pi n\Phi_2) [b_n \sinh(2\pi n\Psi_H) - d_n \cosh(2\pi n\Psi_H)] \quad (10.3.12)$$

où  $\Psi_H$  est la valeur constante de  $\Psi_2$  sur la surface libre. Naturellement,  $X_1$  doit être égal à  $X_2$  et  $Y_1$  égal à  $Y_2$  sur l'interface.

L'équation de Bernoulli à l'interface s'écrit

$$\frac{1}{2}q_1^2 - \frac{1}{2}Rq_2^2 + (1 - R)\frac{1}{F_\lambda}Y_1 = \frac{1}{2}(1 - R) + \frac{1}{2}B$$

où les vitesses tangentielles au-dessous et au-dessus de l'interface,  $q_1$  et  $q_2$ , sont

$$q_1^2 = \left\{ \left[ 1 + \sum_{n=1}^N 2\pi n a_n \cos(2\pi n(\xi - s)) \right]^2 + \left[ \sum_{n=1}^N 2\pi n a_n \sin(2\pi n(\xi - s)) \right]^2 \right\}^{-1},$$

$$q_2^2 = \left\{ \left[ 1 - \sum_{n=1}^N 2\pi n b_n \cos(2\pi n(\xi + s)) \right]^2 + \left[ \sum_{n=1}^N 2\pi n b_n \sin(2\pi n(\xi + s)) \right]^2 \right\}^{-1}$$

et pareil pour l'équation de Bernoulli sur la surface libre.

La variable  $\xi$  est discrétisée en  $N + 1$  points également répartis

$$\xi_i = \frac{i - 1}{2N} \quad i = 1, \dots, N + 1. \quad (10.3.13)$$

Le système d'équations que l'on doit résoudre se compose de  $(N - 1)$  équations  $X_1 = X_2$  (aux points extrêmes, elles sont automatiquement satisfaites),  $(N + 1)$  équations  $Y_1 = Y_2$ ,

$(N + 1)$  équations de Bernoulli le long de l'interface,  $(N + 1)$  équations de Bernoulli le long de la surface libre et la condition de la valeur moyenne (10.1.6). Les  $(4N + 3)$  inconnues sont les constantes de Bernoulli,  $(N + 1)$  coefficients  $a_n$ ,  $(N + 1)$  coefficients  $b_n$ ,  $N$  coefficients  $d_n$  et  $(N - 1)$  coefficients  $c_n$ .

La condition de la valeur moyenne devient explicitement

$$\int_0^{\frac{1}{2}} Y_1 \frac{dX_1}{d\xi} d\xi = 0, \quad (10.3.14)$$

ou

$$\int_0^{\frac{1}{2}} Y_2 \frac{dX_2}{d\xi} d\xi = 0. \quad (10.3.15)$$

L'épaisseur relative de la couche est

$$H = \Psi_H + b_0.$$

Le schéma numérique employé est de type Newton. Les calculs ont été menés avec un nombre variable de points de collocation, généralement jusqu'à  $N = 200$ . On a vérifié l'indépendance des résultats avec  $N$ .

Pour obtenir les conditions initiales pour la méthode de Newton, en prenant des paramètres, proches d'une courbe de dispersion, on a résolu analytiquement le système dans le cas  $N = 2$  et on a obtenu les premiers coefficients pour chaque série de Fourier en fonction de  $\mu = F - F^*$ , où  $F^*$  vérifie la relation de dispersion. Ensuite on a appliqué plusieurs fois le schéma pour  $N$  de plus en plus grand. Les coefficients qui manquent dans les séries de Fourier ont été remplacés par zéro. On a obtenu ainsi de plus en plus de coefficients jusqu'au  $N$  souhaité. Dès qu'une solution était obtenue pour un  $N$  fixé, elle était utilisée comme condition initiale, pour des valeurs des paramètres légèrement différentes.

Le schéma numérique présenté a été utilisé pour calculer des solutions pour certaines valeurs des trois paramètres qui apparaissent dans le problème : le nombre de Froude au carré basé sur la longueur d'onde  $F_\lambda$ , le rapport des densités  $R$  et la hauteur relative de la couche supérieure  $H$  (en fait  $\Psi_H$ ). On s'est concentré sur deux valeurs de  $R$ ,  $R = 0.1$  et  $R = 0.9$  et trois cas ont été étudiés : les ondes longues qui sont des approximations des ondes solitaires généralisées quand  $F_\lambda > F_{\lambda_{lente}}$  et le nombre d'onde est petit, les ondes qui

bifurquent dans le voisinage de la résonance 1 :2 et les ondes périodiques rapides quand  $F_\lambda > F_{\lambda_{\text{rapide}}}$ .

On a dessiné dans la Fig. 10.3 la région où l'on a obtenu ces solutions dans l'espace des paramètres  $(K, F)$  pour  $R = 0.1$ .

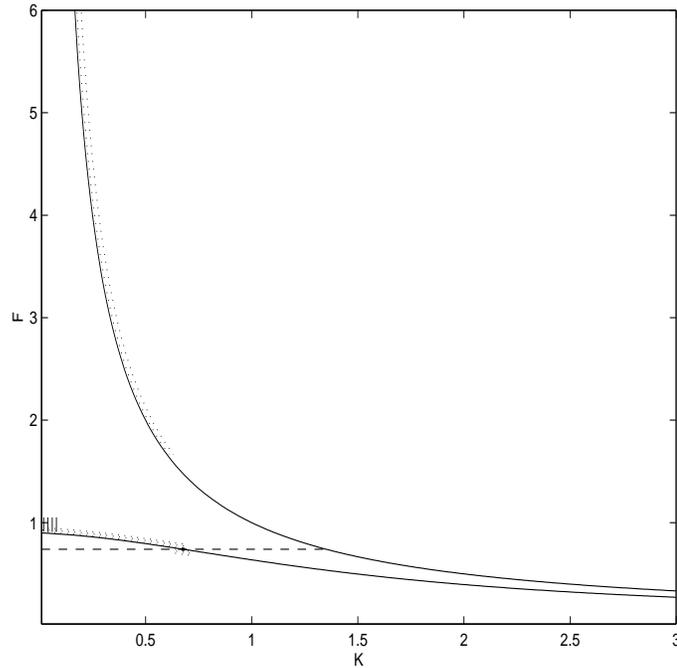


FIG. 10.3 –  $F$  vs.  $K$  pour  $R = 0.1$  et les zones hachurées où l'on a trouvé des solutions; en tirets la valeur de  $F$  où il y a la résonance 1 :2 ( $F = 0.74078$ ,  $K = 0.67496$ ).

## 10.4 Ondes longues

Les calculs dans ce cas ont été effectués généralement avec 160 ou 200 points. Puisque nous nous intéressons aux ondes de type solitaire, nous considérons de grandes valeurs de  $\lambda$  qui impliquent que la hauteur relative de la couche supérieure est petite par rapport à la longueur d'onde ( $H \in [0.001, 0.011]$ , donc  $\lambda/h \in [90, 1000]$ ). Les solutions ont un pulse central, auquel sont associées des oscillations à l'interface et aussi sur la surface libre. Si on note  $\lambda_0$  la longueur d'onde des oscillations obtenues à partir de la relation de dispersion, on s'est concentré sur le cas  $\lambda/\lambda_0 \in [14, 200]$ .

On montre dans la Fig. 10.4 une solution particulière. Le pulse central interfacial et le pulse central sur la surface libre sont toujours de phases opposées. Le pulse à l'interface est de dépression et à la surface libre d'élévation. Les oscillations à l'interface et sur la surface libre, contrairement aux pulses solitaires, sont en phase. Dans le cas  $R = 0.1$  l'amplitude des oscillations est plus importante à la surface libre qu'à l'interface. Le pulse à la surface libre a aussi une amplitude plus grande que le pulse à l'interface. Pour  $R = 0.9$  la situation est inverse pour les pulses (voir Fig. 10.5). Dans ce cas, même si l'on s'attend à trouver des solutions avec des oscillations d'amplitude arbitraire, on ne les a pas trouvés dans nos calculs.

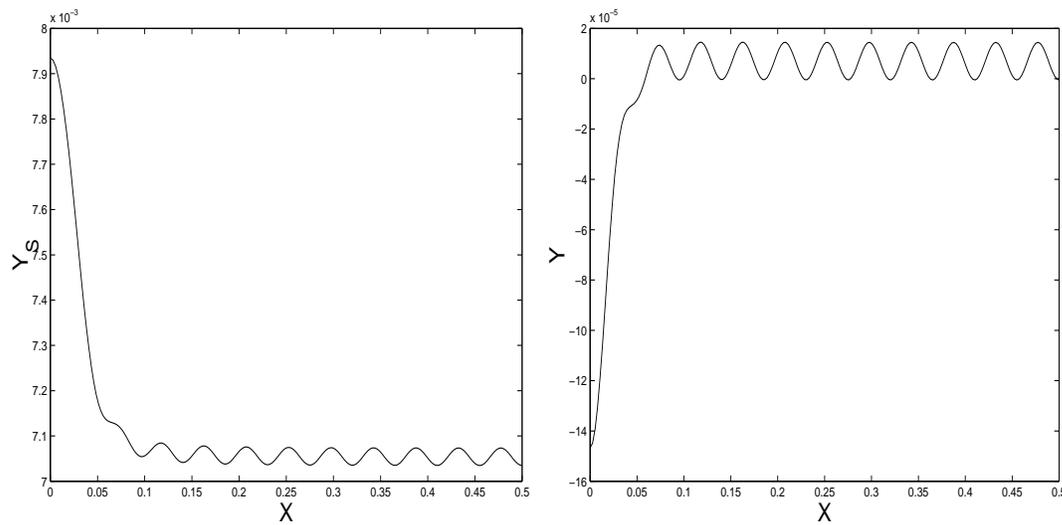


FIG. 10.4 – Profils de la surface libre  $Y_S$  et de l'interface  $Y$  pour  $F_\lambda = 0.00711$ ,  $H = 0.00711$  ( $F = 1$ ). Dans ce cas  $\lambda/\lambda_0 = 22.38$ . On montre uniquement la solution sur une demi-longueur d'onde.

Les solutions sont obtenues plus difficilement quand  $\lambda/\lambda_0 \approx n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . A cause de la résonance, les oscillations deviennent de plus en plus grandes et la convergence numérique devient plus difficile. Une solution pour  $\lambda/\lambda_0$  proche de 22 est montrée dans la Fig. 10.6. Dans ce cas on observe des oscillations de grande amplitude à l'interface et à la surface libre, ayant le même ordre de grandeur que les pulses.

Si on continue à suivre les branches des solutions on trouve des ondes périodiques avec la longueur d'onde  $\lambda_0$ , qui confirme les prédictions théoriques [3]. Il y a deux ondes périodiques symétriques avec  $n$  oscillations qui apparaissent quand  $\lambda/\lambda_0 = n$  (voir Fig.

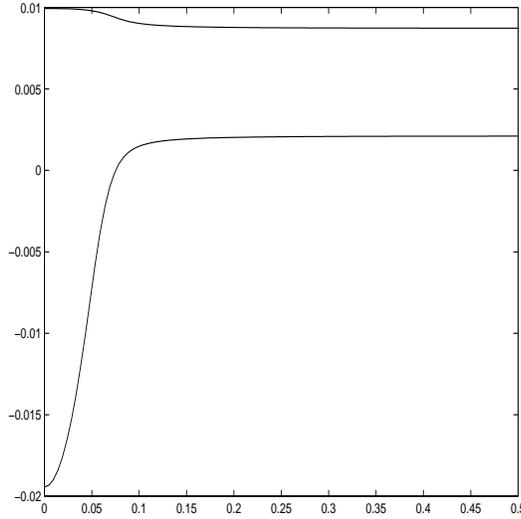


FIG. 10.5 –  $R = 0.9$ ,  $H = 0.0075$ ,  $F_\lambda = 0.002$  ( $\lambda/\lambda_0 \approx 79.57$ ,  $F = 0.266$ )

10.8). On montre deux solutions périodiques avec 24 oscillations dans la Fig. 10.7.

Les valeurs minimales des oscillations sont trouvées pour  $\lambda/\lambda_0 \approx n + 1/2$ . L'amplitude des oscillations est montrée dans la Fig. 10.8 en fonction de  $\lambda/\lambda_0$ . Une famille de solutions peut être définie par une courbe  $n < \lambda/\lambda_0 < n + 1$  (dans la Fig. 10.8) telle que chaque solution d'une famille a le même nombre d'oscillations. La périodicité fait que les solutions se terminent par un creux ou une crête : quand  $n$  est pair une solution se termine par un creux et quand  $n$  est impair elle se termine par une crête.

Le minimum d'amplitude des oscillations a tendance à augmenter si on fait croître le nombre de Froude au carré basé sur la hauteur de la couche supérieure de fluide  $F$  jusqu'au nombre de Froude maximal pour lequel la méthode converge, voir figure 10.9.

On a montré dans la Fig. 10.10 la décroissance des coefficients ( $b_n$ ) d'une série de Fourier obtenus pour deux solutions. On observe la décroissance rapide et l'existence d'un premier pic pour  $n = 22$  qui correspond au nombre d'onde des oscillations ( $\lambda/\lambda_0 \approx 22$  pour ces solutions). Les pics suivants apparaissent pour les multiples de 22 :  $n = 44, 66, \dots$

Les solutions obtenues ne sont pas uniques. Par exemple, dans la Fig. 10.11 on montre deux solutions obtenues avec les mêmes paramètres  $F_\lambda, H, R$ , mais avec des conditions initiales

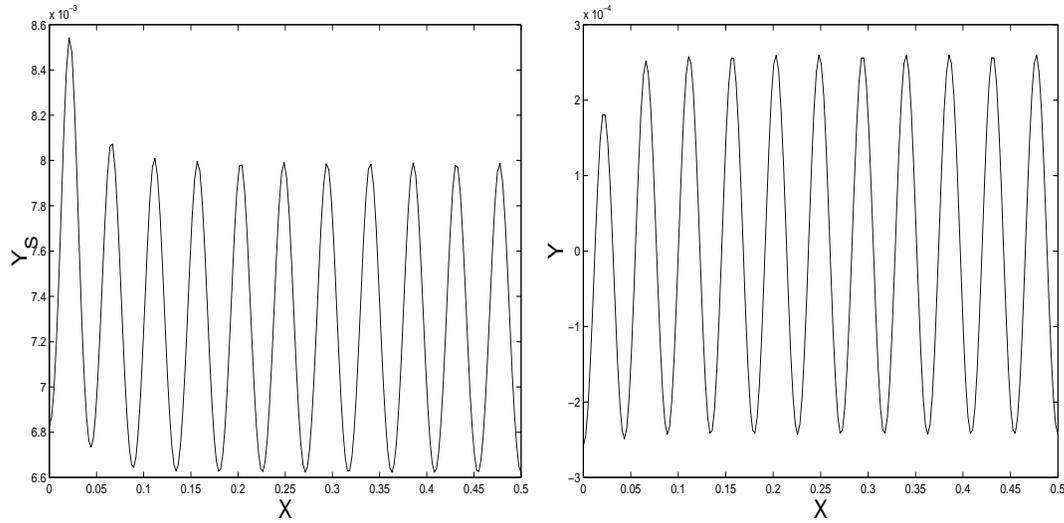


FIG. 10.6 – Profils de la surface libre  $Y_S$  et de l’interface  $Y$  pour  $F_\lambda = 0.00728$ ,  $H = 0.00728$  ( $F = 1$ ). Dans ce cas  $\lambda/\lambda_0 = 21.861$ . Les oscillations ont presque la même taille que les pulses.

différentes. On observe une solution de type nouveau qui a deux pulses symétriques par rapport à  $X = 0$  à l’interface et à la surface libre. Les amplitudes des pulses sont presque égales à l’amplitude de la solution “classique”.

## 10.5 La résonance 1 :2

Pour  $R$  petit, on peut trouver dans l’espace des paramètres  $(F_\lambda, H)$  le point où il y a la résonance 1 :2, c.à.d où la relation de dispersion est satisfaite pour un certain  $K$  et aussi pour  $2K$ . Dans le cas  $R = 0.1$  ce point est  $H_{1:2} = 0.10742$ ,  $F_{\lambda_{1:2}} = 0.079577$  (correspondant au  $K_{1:2} = 0.67496$ ,  $F = 0.74078$ ). Dans le voisinage de ce point on a essayé de rechercher des solutions pour notre problème. Le nombre de points employé était 20 ou 22. Il était difficile d’augmenter le nombre de points, mais il suffit pour bien décrire les ondes périodiques.

On montre quelques exemples des différentes solutions, pour  $H < H_{1:2}$  et  $H > H_{1:2}$  dans les Fig. 10.12-10.17. Si on fixe  $H$  (dans nos graphes  $H = 0.102$ ,  $H = 0.1124$ ), on peut obtenir 1-onde, (1,2)-onde et 2-onde, dépendant des valeurs de  $F_\lambda$ . On utilise le nom “1-

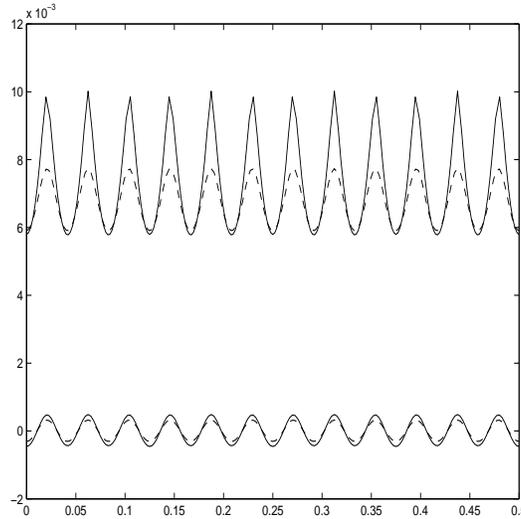


FIG. 10.7 – Profils de la surface libre  $Y_S$  et de l’interface  $Y$  pour une onde périodique avec 24 oscillations pour  $F_\lambda = 0.00711$ ,  $H = 0.00711$  (—) et  $F_\lambda = 0.0067$ ,  $H = 0.0067$  (---) qui correspondent aux symboles ( $\times$ ) et ( $\circ$ ) dans la Fig. 10.8. Dans les deux cas  $F = 1$ ,  $R = 0.1$ .

onde” pour une onde périodique qui a les coefficients du deuxième harmonique petits par rapport à ceux du premier, “(1,2)-onde” pour une onde périodique avec les coefficients du mode fondamental et du deuxième harmonique ayant le même ordre de grandeur et “2-onde” pour une onde périodique avec le coefficient du mode fondamental nul.

Quand  $F$  traverse la courbe  $F_{\lambda_{\text{lente}}}$ , les ondes changent leurs signes. Pour  $F$  proche de la valeur  $F_{1:2}$ , la 1-onde devient une (1,2)-onde. Il y a une autre ligne qui passe par  $(K_{1:2}, F_{1:2})$  où il semble que les (1,2)-ondes deviennent 2-ondes, montrée dans la Fig. 10.18. Pour le cas  $R = 0.9$ , il n’y a pas de résonance 1 :2.

Finalement, on montre aussi les profils de l’interface et de la surface libre obtenus pour des paramètres proches de la résonance 1 :3 dans la Fig.10.19.

## 10.6 Ondes périodiques rapides

Les autres solutions obtenues sont les ondes périodiques qui ont une vitesse plus grande que la vitesse correspondant à  $F_{\lambda_{\text{rapide}}}$ . Le nombre de points utilisé était 60 ou 100.

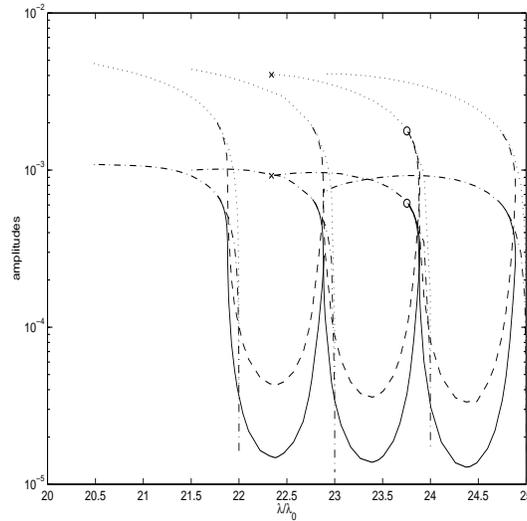


FIG. 10.8 – Amplitudes des oscillations à l’interface (—) et à la surface libre (--) en fonction de  $\lambda/\lambda_0$  pour les ondes solitaires généralisées. Les amplitudes des ondes périodiques avec  $n$  oscillations qui apparaissent quand  $\lambda/\lambda_0 = n$  sont aussi montrées (à l’interface —·— et à la surface libre ···). Les symboles (o) et (x) correspondent aux solutions montrées dans Fig. 10.7. Les paramètres sont  $R = 0.1$ ,  $F = 1$ .

Généralement, on a étudié des ondes longues ( $H \leq 0.04$ ). Pour  $H$  plus grand on a obtenu aussi des solutions, mais avec un nombre de points plus petit. Par exemple, pour  $H = 0.1124$ , le schéma converge avec  $N = 20$ .

Les solutions à l’interface et à la surface libre sont toujours en phase. Ce sont des ondes d’élévation. L’amplitude des ondes augmente quand on s’éloigne de la courbe de bifurcation. On montre dans la Fig. 10.20 des solutions obtenues dans les cas  $R = 0.1$ ,  $R = 0.9$  avec  $F_\lambda$  plus grand que  $F_{\lambda_{\text{rapide}}}$ .

Des ondes périodiques rapides sont obtenues même pour  $R > 1$ , voir Fig. 10.21. Ces solutions probablement ne sont pas stables.

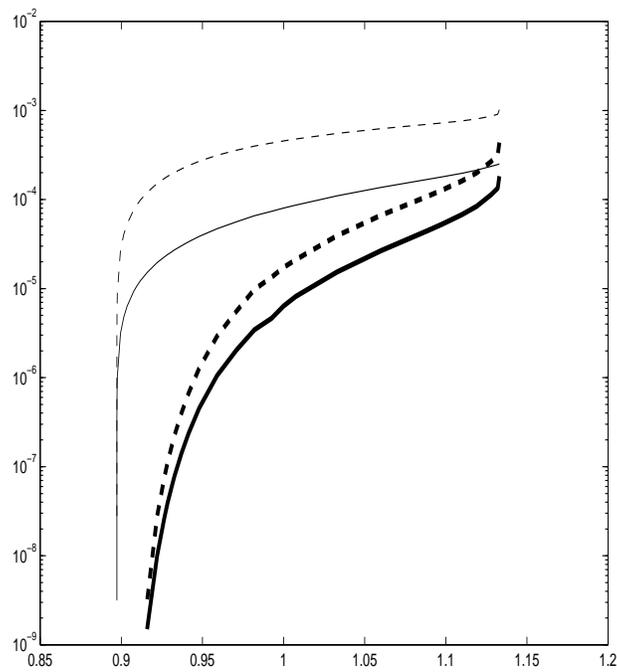


FIG. 10.9 – Amplitudes des pulses à l'interface (—), à la surface (---) et les amplitudes minimales des oscillations à l'interface (-) et à la surface libre (- -) en fonction du nombre de Froude au carré basé sur  $h$ . Le rapport  $\lambda/\lambda_0 \approx 39.49$ .

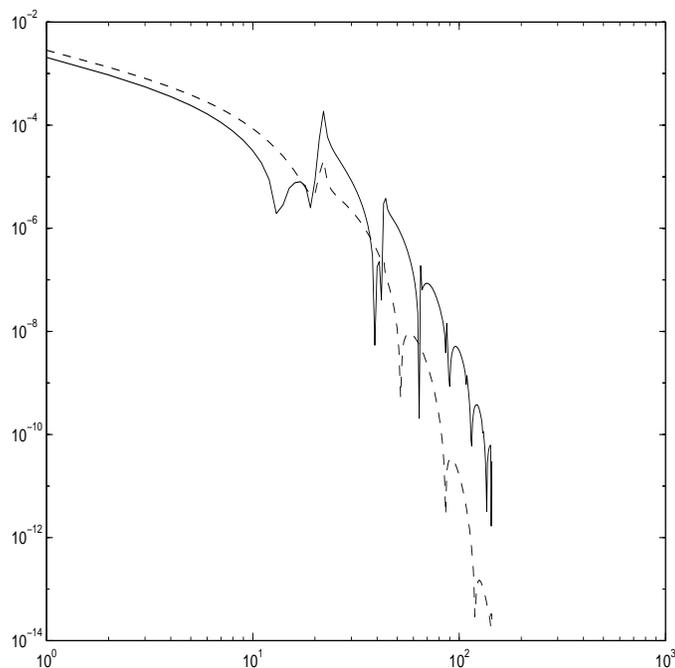


FIG. 10.10 – Les coefficients ( $b_n$ ) de la série de Fourier (10.3.9) pour  $\lambda/\lambda_0 \approx 22$ ,  $R = 0.1$ ,  $F_\lambda = 0.00725$ ,  $H = 0.00725$ (--) et  $F_\lambda = 0.007275$ ,  $H = 0.00725$ (-).

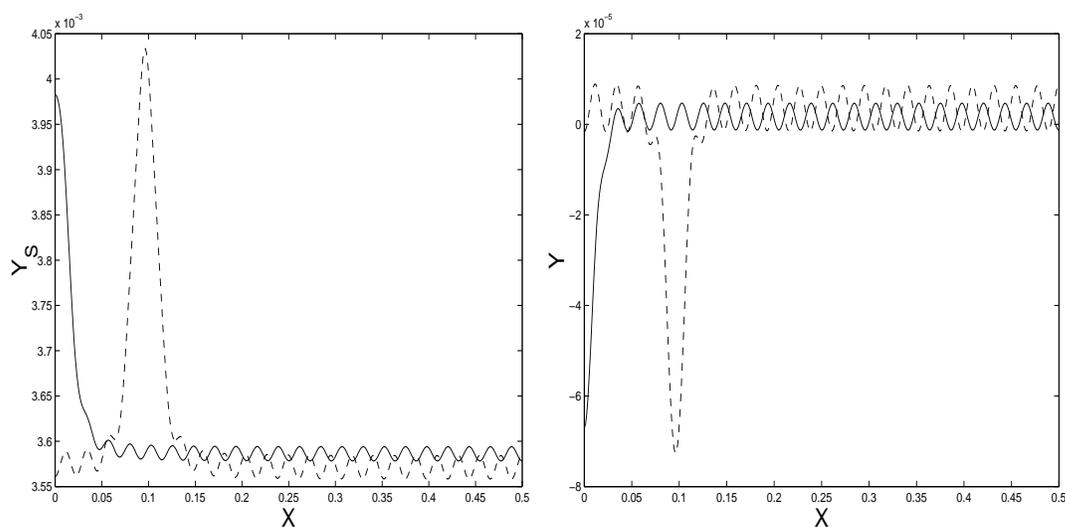


FIG. 10.11 – Profils de la surface libre  $Y_S$  et de l'interface  $Y$  pour  $F_\lambda = 0.0036$ ,  $H = 0.0036$  ( $F = 1$ ) avec des conditions initiales différentes. Dans ce cas  $\lambda/\lambda_0 = 44.20$  et le nombre de points utilisé était 400.

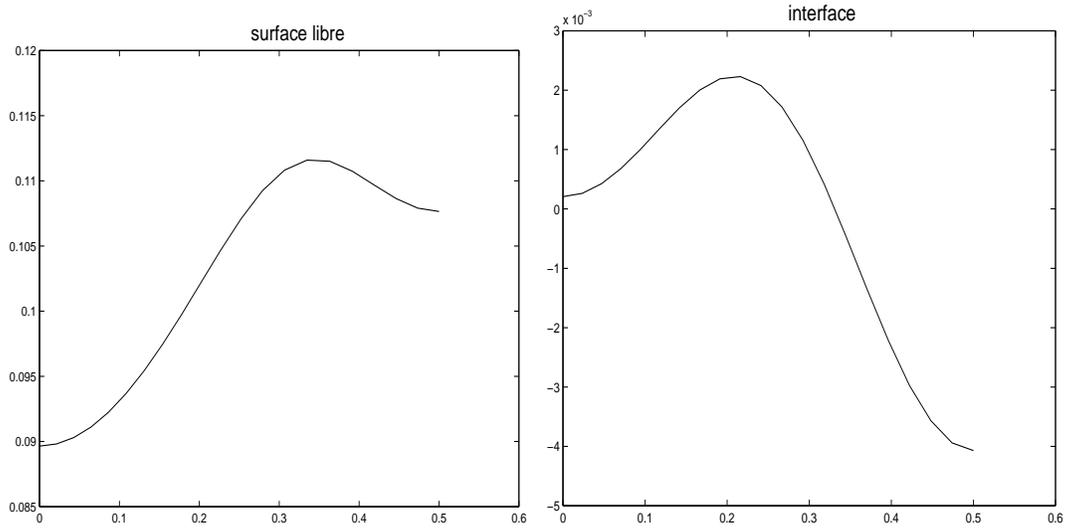


FIG. 10.12 – Profil d'une (1,2)-onde pour  $F_\lambda = 0.0748$ ,  $H = 0.102$  ( $F = 0.7333$ ).

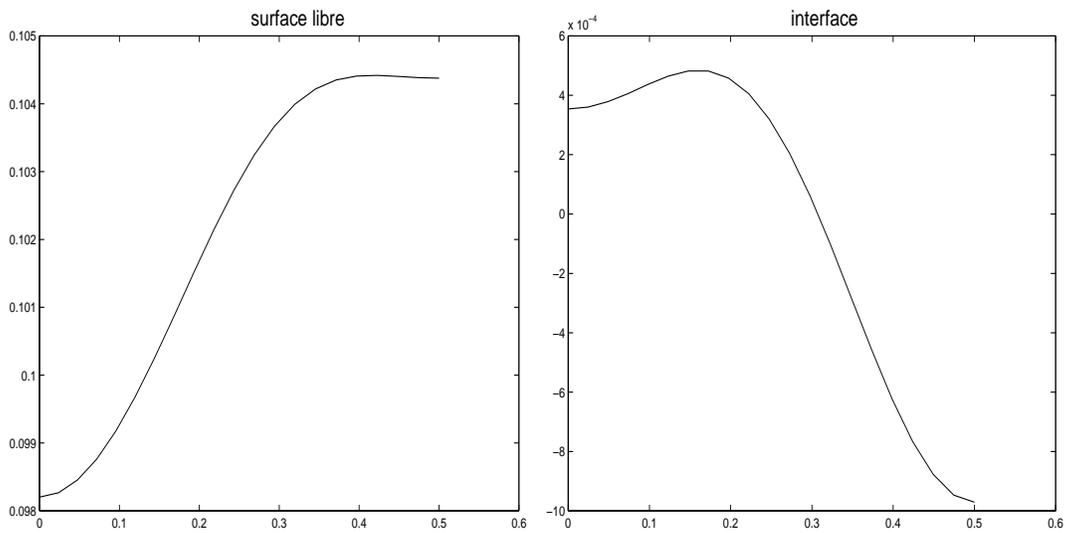


FIG. 10.13 – Profil d'une (1,2)-onde pour  $F_\lambda = 0.07615$ ,  $H = 0.102$  ( $F = 0.7465$ ).

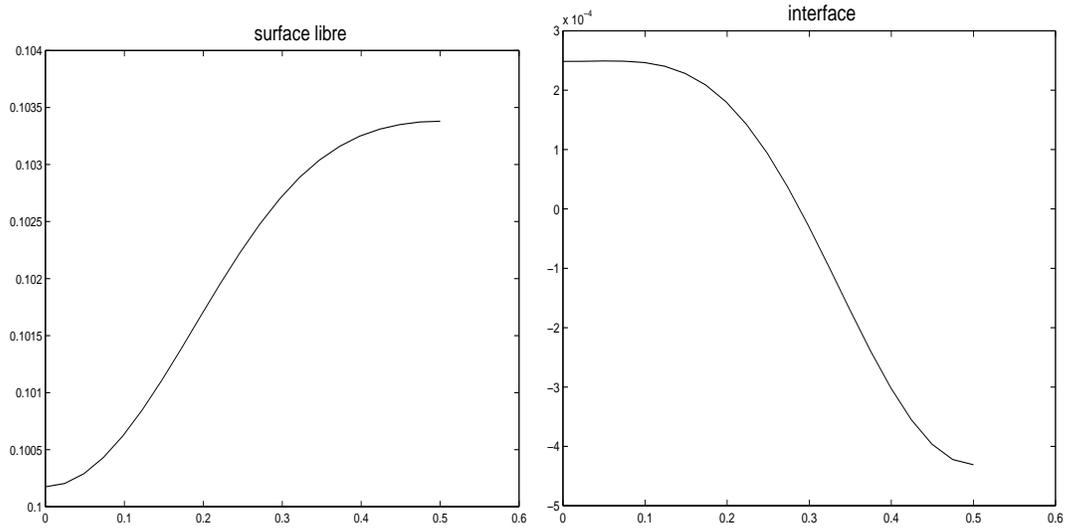


FIG. 10.14 – Profil d'une 1-onde pour  $F_\lambda = 0.0765$ ,  $H = 0.102$  ( $F = 0.75$ ).

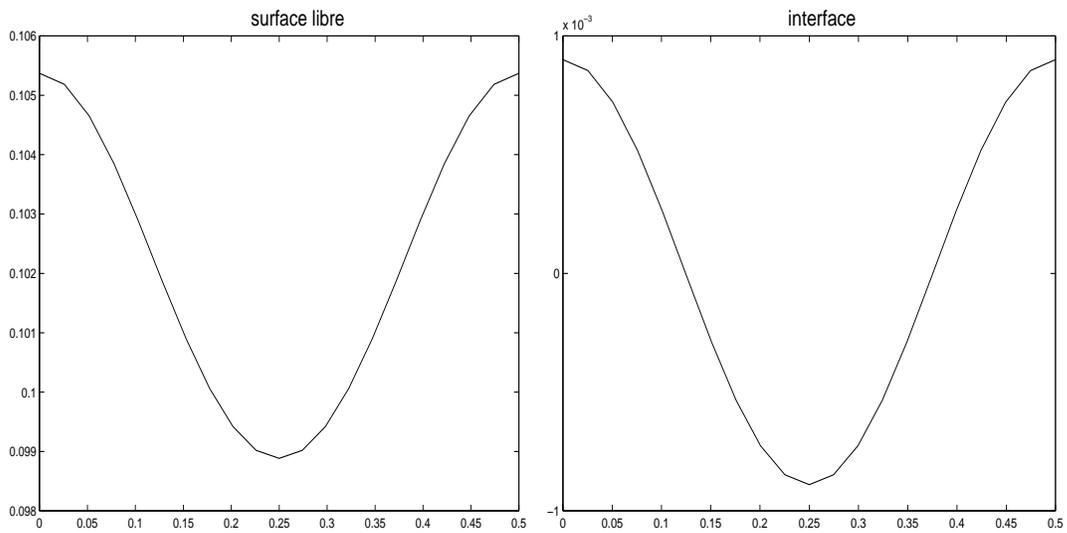


FIG. 10.15 – Profil d'une 2-onde pour  $F_\lambda = 0.07966$ ,  $H = 0.102$  ( $F = 0.7809$ ).

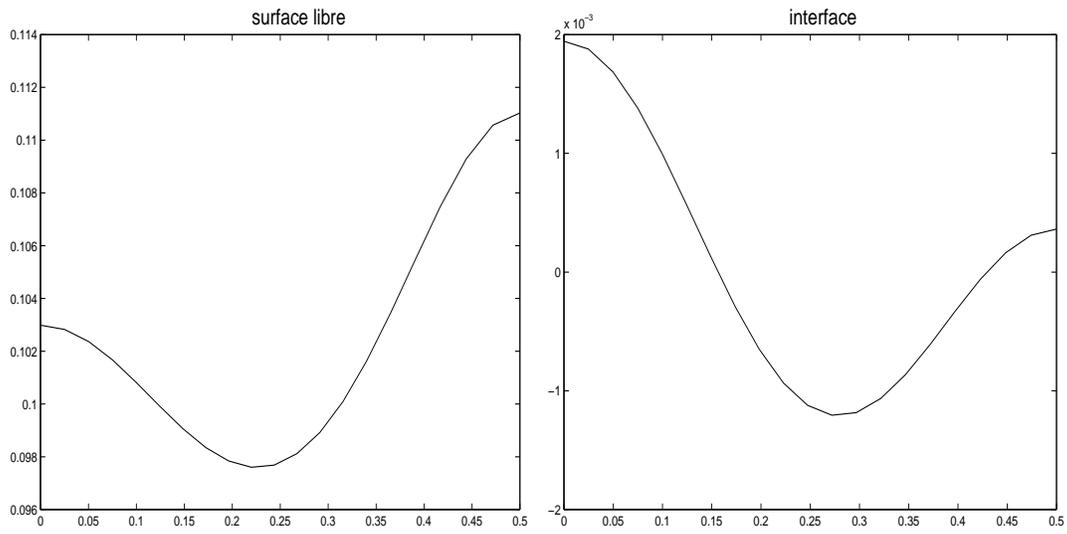


FIG. 10.16 – Profil d'une (1,2)-onde pour  $F_\lambda = 0.081$ ,  $H = 0.102$  ( $F = 0.7941$ ).

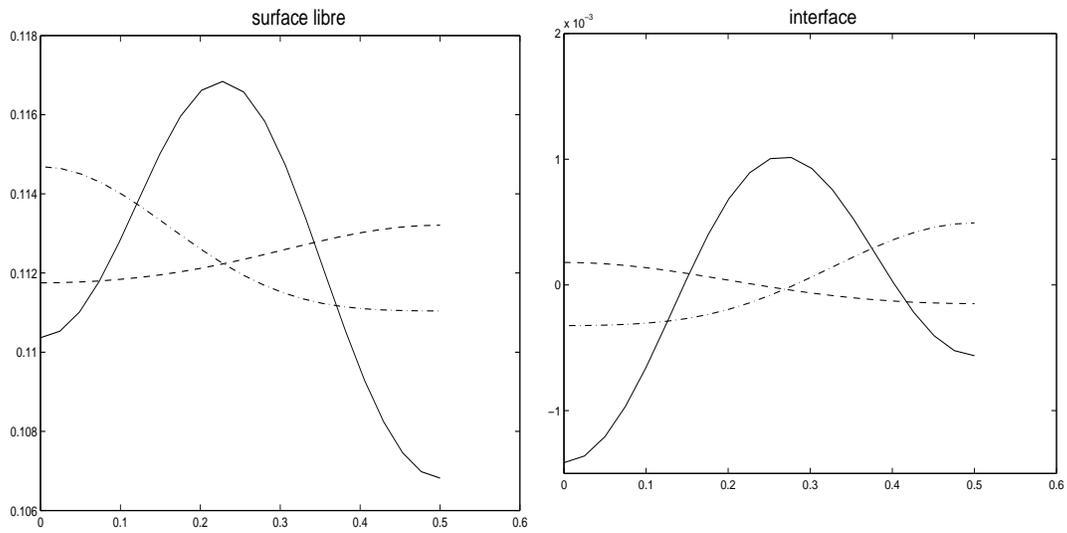


FIG. 10.17 –  $H = .1124$ ,  $F_\lambda = 0.07945$ (-);  $F_\lambda = 0.0822$ (- -);  $F_\lambda = 0.0825$ (- · -) et  $F = 0.7068$ ;  $F = 0.7313$ ;  $F = 0.7339$ .

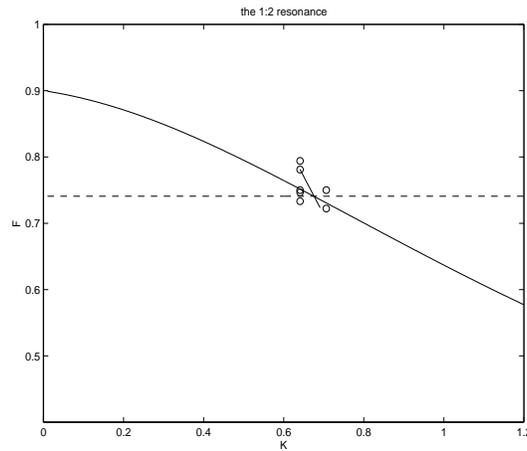


FIG. 10.18 – Le point dans l'espace  $(K, F)$  correspondant à la résonance 1 :2. On a marqué par (o) les solutions montrées dans les Fig. 10.12-10.17. La ligne représente le lieu où on a observé la transformation des (1,2)-ondes en 2-ondes.

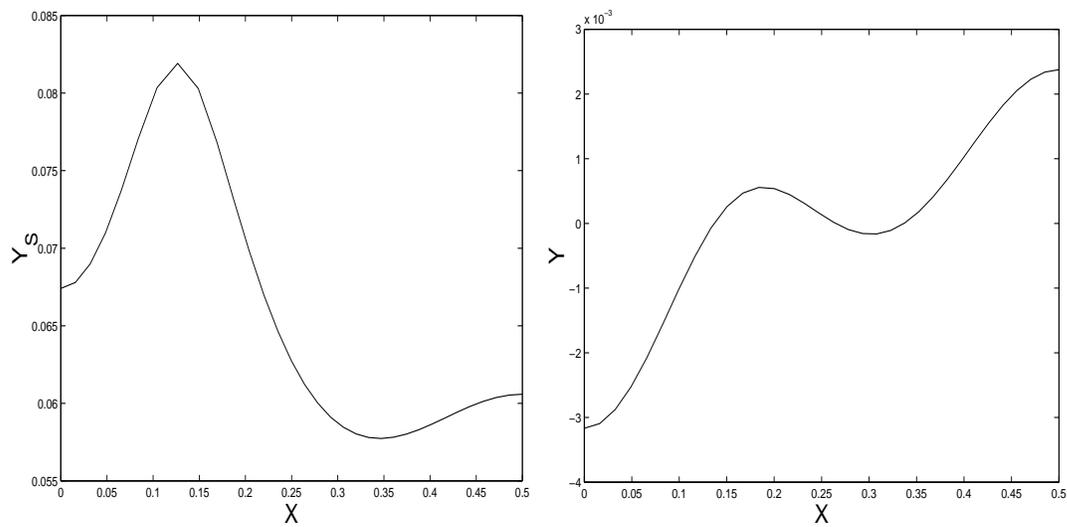


FIG. 10.19 – Profils de la surface libre et de l'interface proche de la résonance 1 :3 pour  $F_\lambda = 0.057$ ,  $H = 0.065$  ( $F = 0.876$ ).

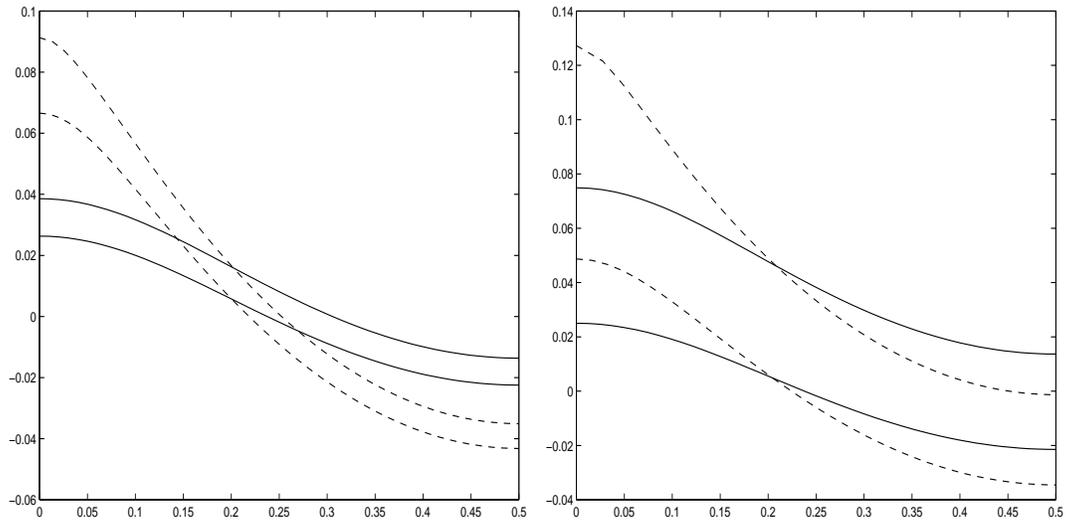


FIG. 10.20 – Ondes périodiques rapides à l'interface et à la surface libre pour  $R = 0.1, H = 0.01, F_\lambda = 0.163(-), F = 16.3$  et  $F_\lambda = 0.18(- -), F = 18.0$  (à gauche),  $R = 0.9, H = 0.04, F_\lambda = 0.165(-), F = 4.125$  et  $F_\lambda = 0.186(- -), F = 4.65$  (à droite).

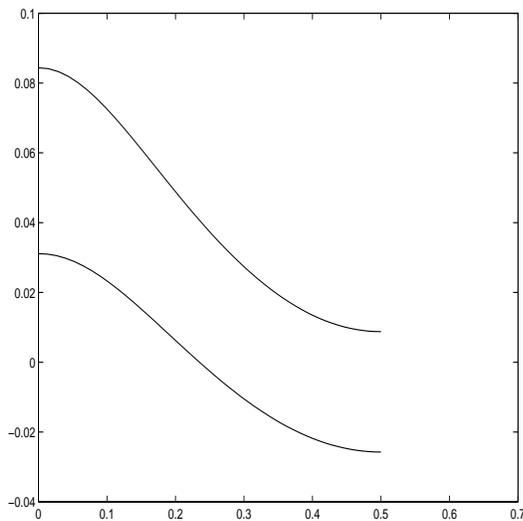


FIG. 10.21 – Solutions pour obtenues pour  $R > 1$ . Les valeurs des paramètres :  $R = 2., F_\lambda = 0.17, F = 4.25$ .

# Discussion

Dans le cas de deux fluides superposés, la couche inférieure ayant la profondeur infinie et la couche supérieure étant en contact avec l'air, il n'est pas possible d'appliquer un théorème de type réduction à la variété centrale parce que le spectre de l'opérateur linéaire du problème linéarisé contient tout l'axe réel qui constitue le spectre essentiel. Pourtant, on pense que les valeurs propres qui sont proches de l'axe imaginaire, qui vérifient la relation de dispersion nous mènent toujours vers les solutions bornées. L'étude de la relation de dispersion quand on suppose la présence des forces capillaires nous montre l'existence de plusieurs configurations possibles de valeurs propres sur l'axe imaginaire par rapport au cas d'un seul fluide. En particulier, quand il y a une valeur propre triple sur l'axe imaginaire on a montré que des ondes solitaires de type nouveau peuvent apparaître, au moins pour la forme normale. Il reste bien sûr à calculer ces ondes solitaires de façon quantitative pour le problème entier.

On s'est intéressé aussi aux ondes périodiques de gravité. Les simulations numériques nous ont permis d'étudier les propriétés quantitatives des ondes solitaires généralisées, approximées par des ondes périodiques très longues. Les pulses centraux sont toujours des phases opposés, pendant que les oscillations sont en phase, le pulse à l'interface étant de dépression. Il serait intéressant d'étudier la stabilité de ces ondes solitaires généralisées. On se demande par exemple si les ondes avec l'amplitude des oscillations minimale sont les plus stables.

Pour des valeurs des paramètres proches de la résonance  $1:2$ , on a mis en évidence plusieurs types d'ondes périodiques de gravité. Les ondes trouvées sont de différents types : des ondes qui ont le profil proche d'une onde sinusoidale, des ondes qui exhibent un creux

dans la crête ou des ondes avec deux crêtes sur une demi-longueur d'onde qui ont les amplitudes égales. Tous ces types d'ondes apparaissent dans le problème des ondes de capillarité-gravité pour un seul fluide. Pour ce problème des ondes de capillarité-gravité il y a plusieurs études dédiées au phénomène de la résonance 1 :2. Les ondes caractérisées par deux modes dominants sont parfois nommées les oscillations de Wilton (“Wilton’s ripples”).

Toutes les ondes périodiques rapides obtenues sont des ondes d’élévation, contrairement aux ondes solitaires généralisées. On a obtenu des ondes même pour des valeurs de  $R$  plus grandes que 1.

Le schéma numérique peut être modifié en introduisant des tensions interfaciale et superficielle et l’étude peut être continuée pour trouver des ondes périodiques de capillarité-gravité dans le cas de deux fluides.

# Bibliographie

- [1] A. R. Champneys, J.M.T. Thompson (1996), A multiplicity of localized buckling modes for twisted rod equations, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **452**, pp.2467-2491.
- [2] P. Christodoulides, F. Dias (1994) Resonant capillary-gravity interfacial waves. *J. Fluid Mech.*, **265**, 303-343.
- [3] F. Dias, A. Il'ichev, Interfacial waves with free-surface boundary conditiond : an approach via a model equation, preprint, 2000.
- [4] G. Iooss (1999), Gravity and capillary-gravity periodic travelling waves for two superposed fluid layers, one being of infinite depth, *J. Math. Fluid Mech.* **1**, pp. 24-61.
- [5] G. Iooss (1998), communiqué privé.
- [6] G. Iooss, K. Kirchgässner (2000), Travelling waves in a chain of coupled nonlinear oscillator, *Com. Math. Phys.* **211**, pp. 439-464.
- [7] T. Kakutani, N. Yamasaki (1978), Solitary waves o a two-layer fluid, *J. Phys. Soc. of Japan*, **45**, pp.674-679.
- [8] T. Levi-Civita (1925), Détermination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie, *Math. Annalen*, **93**, pp. 264-314.
- [9] H. Michallet, E. Barthélemy (1998), Experimental study of interfacial solitary waves, *J. Fluid Mech.*, **366**, pp. 159-177.
- [10] H. Michallet, F. Dias (1999), Numerical study of generalized interfacial solitary waves, *Phys. Fluids* **11**, pp. 1502-1511.
- [11] J. N. Moni, A. C. King (1995), Guided and unguided interfacial solitary waves *Q. J. Mech. Appl. Math.* **48**, No.1, pp. 21-38.

- [12] Q. Pouliquen, J. M. Chomaz, P. Huerre, P. Tabeling (1992), Wave-number selection and phase solitons in spatially forced temporal mixing layers, *Phys. Rev. Lett.* **6**, pp. 2596-2599.
- [13] P. Saffman, H. C. Yuen (1982), Finite-amplitude interfacial waves in the presence of a current, *J. Fluid Mech.* **123**, 459-476.
- [14] L. W. Schwartz, J.-M. Vanden-Broeck (1979), Numerical solution of the exact equations for capillary-gravity waves, *J. Fluid Mech.* **95**, pp. 119-139.
- [15] S. M. Sun, M. C. Shen, (1993) Exact theory of generalized solitary waves in a two-layer liquid in the absence of surface tension. *J. Math. Anal. Appl.*, **180**, No.1, pp. 245-274
- [16] S. A. Thorpe (1969), Experiments on the instability of stratified shear flows : immiscible fluids, *J. Fluid Mech.* **39**, pp. 25-48.
- [17] J.-M. Vanden-Broeck (1991), Elevation solitary waves with surface tension, *Phys. Fluids A*, **3** (11), pp. 2659-2663.

# Table des figures

1	La vitesse de phase $c$ dans m/s en fonction du nombre d'onde $k$ dans $\text{m}^{-1}$ pour les paramètres correspondants aux expériences de Takizawa [26]. Le minimum de la vitesse est $c_{\min} = 6.09$ m/s et le nombre d'onde correspondant est $k = 0.334$ $\text{m}^{-1}$ . Quand la vitesse est plus grande que $c_{\min}$ et plus petite que la vitesse d'onde longue $c(0)$ , il existe deux nombres d'ondes correspondants, $k_g$ dans la partie de gravité et $k_f$ dans la partie de flexion.	14
1.1	Reproduction de la figure 6 de Takizawa [27] : le profil de la couche de glace pour des vitesses diverses.	18
1.2	Reproduction de la figure 9 de Takizawa [27] qui montre la variation de la profondeur de la dépression (en mm sur l'axe vertical) en fonction de la vitesse (en m/s).	19
2.1	Schéma de l'écoulement	22
2.2	La rayon de courbure $R$ pour la plaque élastique d'épaisseur $h$	24
3.1	Le déplacement stationnaire de la couche de glace $\zeta(x^* - ct)$ pour les paramètres physiques correspondants aux expériences de Takizawa (voir la Tab. 1). La valeur de $P$ a été estimée à $P = 320$ N/m <sup>2</sup> . De haut en bas et de gauche à droite, les valeurs de la vitesse $c$ sont 0; 2.2; 4.2; 5.5; 5.8. Les deux échelles sont en mètres.	30

4.1	Les valeurs de $f$ et $\lambda$ correspondant au minimum de la courbe de dispersion (trait plein). Le trait en tirets $\lambda = 1$ correspond à la vitesse des ondes longues $\sqrt{gH}$ . Le changement dans le comportement des valeurs propres proches de l'axe imaginaire est aussi montré. Le trait en pointillés représente les valeurs dans les expériences de Takizawa. Il est donné par $\lambda = (\rho g H^4 / D)^{1/4} f^{3/4}$ , i.e. $\lambda \approx 3.09 f^{3/4}$ . Le losange représente le lieu où le coefficient $q_2$ donné par (4.4.31) s'annule. . . . .	36
4.2	Le graphe du coefficient $q_2$ donné par (4.4.31) en fonction de $\kappa$ . Les grandes valeurs de $\kappa$ correspondent à l'eau profonde et les petites valeurs de $\kappa$ correspondent à l'eau peu profonde. Le cercle correspond aux expériences de Takizawa et le point correspond à $q_2 = 0$ . . . . .	43
4.3	Graphe de $\eta(x)$ pour deux ondes solitaires de dépression. A l'exception de la charge, qui est absente, les paramètres sont les mêmes que dans les expériences de Takizawa. En haut : $c = 5.8$ m/s, i.e. $f = 0.552$ et $\lambda = 1.98$ . Par conséquent, $\kappa = 2.19$ et $\mu = 0.065$ . L'unité de longueur est $L = 1.9$ m. En bas : $c = 6$ m/s, i.e. $f = 0.504$ et $\lambda = 1.85$ . Par conséquent, $\kappa = 2.25$ et $\mu = 0.019$ . L'unité de longueur est $L = 1.85$ m. . . . .	46
5.1	Le chemin d'intégration $C_R$ dans le plan $(\phi, \psi)$ . . . . .	49
5.2	Les profils $\eta(x)$ pour une onde solitaire d'élévation (en haut) avec $f = 0.4959$ , $\lambda = 1.838$ , $\mu = 0.018$ et pour une onde solitaire de dépression (en bas) avec $f = 0.5215$ , $\lambda = 1.933$ , $\mu = 0.036$ . Pour les deux ondes, $f/\lambda \approx 0.27$ . Les solutions analytiques sont en trait plein et les solutions numériques en tirets. . . . .	52
6.1	Solutions homoclines à 0 pour l'équation 6.1.10 dans l'espace $(u, u_x)$ dans les cas où elles existent . . . . .	57
6.2	Profils de $s(x)$ donnés par (6.2.18) dans le cas $q_2 > 0$ avec $\varepsilon = 0.003$ , $\mu = 0.02$ , $\kappa = 2.27$ . . . . .	59

6.3 Profils des ondes correspondantes  $\eta(x)$  dans le cas  $q_2 > 0$  avec  $\varepsilon = 0.003, \mu = 0.02, \kappa = 2.27$ ; (a) ondes d'élévation, (b) ondes de dépression. . . . . 61

6.4 Le profil de  $s(x)$  (en haut) et le profil correspondant de l'onde  $\eta(x)$  (en bas) dans le cas  $q_2 < 0$  avec  $\varepsilon = 0.003, \mu = 0.02, \kappa = \infty$  (profondeur infinie). . . 62

6.5 Le profil de  $s(x)$  (en haut) et le profil correspondant de l'onde  $\eta(x)$  (en bas) dans le cas  $q_2 < 0$  avec  $\varepsilon = 0.003, \mu = 0, \kappa = \infty$  (profondeur infinie). On peut observer la décroissance algébrique de l'onde à l'infini. . . . . 63

6.6 L'amplitude  $|\eta(0)|$  en fonction de  $\mu$  pour  $q_2 > 0$  (en haut) et  $q_2 < 0$  (en bas). La valeur de  $\kappa$  est 2.27 pour  $q_2 > 0$ , comme dans la Fig. 6.2. La valeur de  $\kappa$  est infinie pour  $q_2 < 0$ , comme dans la Fig. 6.4. Diverses solutions sont montrées : la solution du problème linéarisé ( $\cdot - \cdot - \cdot$ ) avec  $\varepsilon \neq 0$  (voir Ch. 3), la solution analytique avec  $\varepsilon = 0$  ( $--$ ) (voir Ch. 4) et les solutions de l'équation de Schrödinger nonlinéaire forcée avec  $\varepsilon \neq 0$  (trait plein). Quand  $q_2 < 0$  on peut observer que dans la limite  $\mu \rightarrow 0$ ,  $|\eta(0)|$  reste fini. La valeur de  $\varepsilon$  dans ces graphes est 0.003 ou 0. . . . . 64

B.1 Les profils  $\eta(x)$  dans le cas  $\varepsilon = 0.01$  avec  $f = 0.4894, \lambda = 1.814, \mu = 0.004$  (en haut, à gauche),  $f = 0.5045, \lambda = 1.87, \mu = 0.019$  (en haut, à droite),  $f = 0.5396, \lambda = 2.00, \mu = 0.054$  (en bas, à gauche),  $f = 0.6772, \lambda = 2.51, \mu = 0.192$  (en bas, à droite). Pour toutes ces ondes,  $f/\lambda \approx 0.27$ . Pour le premier graphe,  $L = 1.84$  et la valeur physique de l'amplitude est  $\zeta(0) = 2.7\text{cm}$  qui est proche de la valeur obtenue dans les expériences. Quand on s'éloigne de la courbe  $\Gamma$  on observe une crête qui apparaît dans le creux et qui devient de plus en plus grande. Finalement, l'onde devient une onde d'élévation qui n'était pas observée dans les expériences. . . . . 76

C.1 L'amplitude  $|s(0)|$  en fonction de  $\mu$  pour  $q_2 > 0$  (à gauche) et  $q_2 < 0$  (à droite). Les valeurs de  $q_1, q_2$  et  $\varepsilon$  sont les mêmes que dans la Fig. 6.6. Les solutions en tirets sont des perturbations de la solution du problème linéarisé. Les solutions en tirets-pointillés ont des amplitudes trop grandes pour qu'elles soient acceptables physiquement. . . . . 78

C.2	Les profils $s$ et les profils correspondants $\eta$ qui sont périodiques sur $\mathbb{R}^-$ et tendant vers zéro pour $x \rightarrow \infty$ pour $q_2 > 0, \mu > 0$ . Les paramètres sont $k = 2.27, q_1 = 0.489, q_2 = 1.055, \varepsilon = 0.003, \theta_0 = 0, C = 0$ . . . . .	82
C.3	Orbites homoclines à la même onde périodique dans l'espace $(u, u_x)$ pour $q_2 < 0, \mu < 0$ . . . . .	83
C.4	Des profils $\eta$ des ondes solitaires noires obtenues dans (C.10) et (C.11). Les paramètres choisis correspondent à la profondeur infinie. En plus, $\varepsilon = 0.003, \mu = -0.0017$ (à gauche), $\mu = -0.001$ (à droite). . . . .	83
6.1	Les vitesses $c_{\text{rapide}}^2$ et $c_{\text{lente}}^2$ (adimensionalisées) en fonction de nombre d'onde sans dimension $kh$ . La valeur de $R$ est 0.1. . . . .	89
8.1	$F(k)$ pour $R = 0.1$ . . . . .	98
8.2	$F$ en fonction de $k$ pour $\tau_1 \neq 0, \tau_2 \neq 0$ . La valeur propre quadruple est dans ce cas $0.9i$ qui correspond aux valeurs de paramètres $R = 0.1228, \tau_1 = 0.2874, \tau_2 = 0.466, F = 0.8472$ (-). Les deux autres courbes sont des solutions $F(k)$ pour des valeurs des paramètres proches de cette valeur : $R = 0.1228, \tau_1 = 0.2874, \tau_2 = 0.66$ (--) et $R = 0.1228, \tau_1 = 0.2274, \tau_2 = 0.466, (- \cdot -)$ . . . . .	100
8.3	Les courbes $(R(k), \tau_1(k))$ et $(F(k), \tau_1(k))$ qui correspondent aux points triples sur l'axe imaginaire $ik$ quand $\tau_2 = 0$ . . . . .	101
8.4	Les courbes $(R(k), \tau_2(k))$ et $(F(k), \tau_2(k))$ qui correspondent aux points triples sur l'axe imaginaire $ik$ quand $\tau_1 = 0$ . . . . .	102
8.5	A gauche : les courbes $F_1$ et $F_2$ pour $R = 0.3, \tau_2 = 0$ et $\tau_1 = 0.3$ (--), $\tau_1 = 0.55$ (-), $\tau_1 = 1$ (- · -). Le point triple apparaît pour $\tau_1 = 0.55$ . A droite : le schéma des valeurs propres proches de l'axe imaginaire dans le voisinage d'une valeur propre triple. . . . .	102

8.6  $F_1$  et  $F_2$  pour  $R = 0.9, \tau_2 = 0$  et  $\tau_1 = 0.08$ . On observe les deux valeurs propres doubles qui sont très proches, mais on peut montrer qu'elles ne peuvent jamais fusionner, quelque soit la configuration des paramètres. . . . . 103

9.1 En haut : région où l'on trouve les ondes solitaires et le changement dans le comportement des valeurs propres proches de l'axe imaginaire. Le symbole ( $\circ$ ) représente la valeur propre triple et ( $\times$ ) une valeur propre double. En bas : profil d'une onde solitaire . . . . . 108

10.1  $K_2/K_1$  en fonction de  $F$  pour  $F \in (0, 1 - R)$  dans deux cas :  $R = 0.1$  et  $R = 0.9$ . Le phénomène de résonance 1 :2 existe uniquement dans le premier cas pour  $F = 0.74078$  ; dans le deuxième cas  $K_2/K_1 \geq 19$  . . . . . 114

10.2  $F_\lambda$  vs.  $H$  pour  $R = 0.1$  . . . . . 115

10.3  $F$  vs.  $K$  pour  $R = 0.1$  et les zones hachurées où l'on a trouvé des solutions ; en tirets la valeur de  $F$  où il y a la résonance 1 :2 ( $F = 0.74078, K = 0.67496$ ). 118

10.4 Profils de la surface libre  $Y_S$  et de l'interface  $Y$  pour  $F_\lambda = 0.00711, H = 0.00711$  ( $F = 1$ ). Dans ce cas  $\lambda/\lambda_0 = 22.38$ . On montre uniquement la solution sur une demi-longueur d'onde. . . . . 119

10.5  $R = 0.9, H = 0.0075, F_\lambda = 0.002$  ( $\lambda/\lambda_0 \approx 79.57, F = 0.266$ ) . . . . . 120

10.6 Profils de la surface libre  $Y_S$  et de l'interface  $Y$  pour  $F_\lambda = 0.00728, H = 0.00728$  ( $F = 1$ ). Dans ce cas  $\lambda/\lambda_0 = 21.861$ . Les oscillations ont presque la même taille que les pulses. . . . . 121

10.7 Profils de la surface libre  $Y_S$  et de l'interface  $Y$  pour une onde périodique avec 24 oscillations pour  $F_\lambda = 0.00711, H = 0.00711$  (—) et  $F_\lambda = 0.0067, H = 0.0067$  (---) qui correspondent aux symboles ( $\times$ ) et ( $\circ$ ) dans la Fig. 10.8. Dans les deux cas  $F = 1, R = 0.1$ . . . . . 122

- 10.8 Amplitudes des oscillations à l'interface (-) et à la surface libre (--) en fonction de  $\lambda/\lambda_0$  pour les ondes solitaires généralisées. Les amplitudes des ondes périodiques avec  $n$  oscillations qui apparaissent quand  $\lambda/\lambda_0 = n$  sont aussi montrées (à l'interface -.- et à la surface libre ...). Les symboles (o) et (x) correspondent aux solutions montrées dans Fig. 10.7. Les paramètres sont  $R = 0.1, F = 1$ . . . . . 123
- 10.9 Amplitudes des pulses à l'interface (-), à la surface (--) et les amplitudes minimales des oscillations à l'interface (-) et à la surface libre (- -) en fonction du nombre de Froude au carré basé sur  $h$ . Le rapport  $\lambda/\lambda_0 \approx 39.49$ . 124
- 10.10 Les coefficients ( $b_n$ ) de la série de Fourier (10.3.9) pour  $\lambda/\lambda_0 \approx 22, R = 0.1, F_\lambda = 0.00725, H = 0.00725$ (--) et  $F_\lambda = 0.007275, H = 0.00725$ (-). . . 125
- 10.11 Profils de la surface libre  $Y_S$  et de l'interface  $Y$  pour  $F_\lambda = 0.0036, H = 0.0036$  ( $F = 1$ ) avec des conditions initiales différentes. Dans ce cas  $\lambda/\lambda_0 = 44.20$  et le nombre de points utilisé était 400. . . . . 125
- 10.12 Profil d'une (1,2)-onde pour  $F_\lambda = 0.0748, H = 0.102$  ( $F = 0.7333$ ). . . . . 126
- 10.13 Profil d'une (1,2)-onde pour  $F_\lambda = 0.07615, H = 0.102$  ( $F = 0.7465$ ). . . . . 126
- 10.14 Profil d'une 1-onde pour  $F_\lambda = 0.0765, H = 0.102$  ( $F = 0.75$ ). . . . . 127
- 10.15 Profil d'une 2-onde pour  $F_\lambda = 0.07966, H = 0.102$  ( $F = 0.7809$ ). . . . . 127
- 10.16 Profil d'une (1,2)-onde pour  $F_\lambda = 0.081, H = 0.102$  ( $F = 0.7941$ ). . . . . 128
- 10.17  $H = .1124, F_\lambda = 0.07945$ (-);  $F_\lambda = 0.0822$ (- -);  $F_\lambda = 0.0825$ (- . -) et  $F = 0.7068; F = 0.7313; F = 0.7339$ . . . . . 128
- 10.18 Le point dans l'espace ( $K, F$ ) correspondant à la résonance 1 :2. On a marqué par (o) les solutions montrées dans les Fig. 10.12-10.17. La ligne représente le lieu où on a observé la transformation des (1,2)-ondes en 2-ondes. 129
- 10.19 Profils de la surface libre et de l'interface proche de la résonance 1 :3 pour  $F_\lambda = 0.057, H = 0.065$  ( $F = 0.876$ ). . . . . 129

10.20 Ondes périodiques rapides à l'interface et à la surface libre pour  $R = 0.1, H = 0.01, F_\lambda = 0.163(-), F = 16.3$  et  $F_\lambda = 0.18(--), F = 18.0$  (à gauche),  $R = 0.9, H = 0.04, F_\lambda = 0.165(-), F = 4.125$  et  $F_\lambda = 0.186(--), F = 4.65$  (à droite). . . . . 130

10.21 Solutions pour obtenues pour  $R > 1$ . Les valeurs des paramètres :  $R = 2., F_\lambda = 0.17, F = 4.25$ . . . . . 130

